Todistamme seuraavaksi, että

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_k = \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

Ensinnäkin

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_k = \bigcup_{k=1}^{n} \left(E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \right) \subset \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

Käytämme induktiotodistusta. Ensiksi huomaamme, että $E_1 = F_1$. Siis väite on tosi, kun $n = 1$. Oletamme seuraavaksi, että väite pätee arvolla n, eli

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \bigcup_{k=1}^{n} F_k.$$

Tällöin saamme arvolla $n+1$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n+1} F_k &= F_{n+1} \cup \bigcup_{k=1}^{n} F_k \\
&= \left(E_{n+1} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right) \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k \right) \\
&= \left(E_{n+1} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right) \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right) = \bigcup_{k=1}^{n+1} E_k.
\end{aligned}$$

Siten kaikilla arvoilla n on voimassa

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_k = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Koska tämä pätee siis kaikilla luvun n arvoilla, niin erityisesti

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Olkoon nyt

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Tällöin on olemassa sellainen k, että $x \in E_k$. Siis

$$x \in \bigcup_{i=1}^{k} E_i = \bigcup_{i=1}^{k} F_i,$$

joten on olemassa j siten, että $x \in F_j$. Siis saamme

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i.$$

Näin ollen

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i,$$

ja väite on siis todistettu. □

Näiden lemmojen avulla voimme nyt todistaa seuraavan lauseen.

Lause 1.2.10 *Jos joukot E_i ovat mitallisia, niin myös joukot*

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \qquad ja \qquad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i.$$

ovat mitallisia. Edelleen

$$m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) \le \sum_{i \in \mathbb{N}} m(E_i)$$

ja mikäli mitalliset joukot E_i ovat pistevieraita, pätee yhtäsuuruus eli

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

Todistus. Olkoot joukot E_i mitallisia. Tällöin Lemman 1.2.9 nojalla on olemassa pistevieraat mitalliset joukot F_i siten, että

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Koska joukot E_i ovat mitallisia, niin Lauseen 1.2.6 nojalla myös joukko

$$\bigcup_{i=1}^{k} E_i$$

on mitallinen. Mitallisuuden määritelmän mukaan tämä tarkoittaa sitä, että

$$m^*(A) = m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) + m^*\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right).$$

Tässä vasemman puolen ensimmäisen termin voimme Lemman 1.2.8 avulla kirjoittaa muotoon

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap F_i).$$

Jälkimmäisessä termissä voimme kasvattaa summauksen äärettömäksi, jolloin kyseisen joukon ulkomitalle on voimassa

$$m^*\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) \geq m^*\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right).$$

Tällöin saadaan kaikille $k \in \mathbb{N}$

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{k} m^*\left(A \cap F_i\right) + m^*\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right).$$

Koska tämä siis on voimassa kaikilla arvoilla $n \in \mathbb{N}$, niin voimme nostaa summauksen äärettömyyteen asti, jonka jälkeen voimme käyttää ulkomitan subadditiivisuutta. Näin saamme

$$\begin{aligned}
m^*(A) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(A \cap F_i\right) + m^*\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \\
&\geq m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)\right) + m^*\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \\
&\geq m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\right) + m^*\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right).
\end{aligned}$$

Mutta tämähän tarkoittaa sitä, että yhdiste $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ on mitallinen. Tästä puolestaan saamme leikkauksen $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ mitallisuuden. Nimittäin muistamme, että mitallisen joukon komplementti on mitallinen ja huomaamme, että

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus E_i).$$

Väitteen toinen osa, eli mitan subadditiivisuus, on suora seuraus ulkomitan subadditiivisuudesta, sillä mitallisille joukoille mitta on sama kuin ulkomitta.

Viimeisen osan eli täydellisen additiivisuuden saamme seuraavasti: Jos joukot E_i ovat pistevieraita, niin Lemman 1.2.8 nojalla saamme

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

Jos vasemmalla puolella kasvatamme lukua n, niin kyseisen yhdisteen koko ei voi pienetä, joten saamme kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

Mutta koska tämä siis pätee kaikilla arvoilla n, voimme nyt myös oikealla puolella antaa $n \to \infty$. Siis

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

Toisaalta mitan subadditiivisuuden perusteella on voimassa

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

Siten yhdistämällä edellä olevat epäyhtälöt saamme täydellisen additiivisuuden eli

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i),$$

mikäli joukot E_i ovat pistevieraita. $\square$

Palautetaan mieleen, että joukko $A \subset \mathbb{R}$ on *avoin,* jos jokaiselle $x \in A$ on olemassa sellainen avoin väli I, että $I \subset A$ ja $x \in I$. Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on *suljettu*, jos $\mathbb{R} \setminus A$ on avoin. Avoimet joukot voidaan esittää avoimien välien avulla.

Lemma 1.2.11 *Jos joukko $A \subset \mathbb{R}$ on avoin, niin on olemassa numeroituva määrä avoimia välejä I_k siten, että*

$$A = \bigcup_k I_k.$$

Todistus. Todistuksessa käytämme hyväksi rationaalilukujen joukon $\mathbb{Q}$ numeroituvuutta. Numeroidaan joukon $\mathbb{Q}$ alkiot seuraavasti $r_1, r_2, \ldots$. Olkoon $x \in A$ mielivaltainen piste. Koska joukko A on avoin, niin on olemassa avoin väli

$$]\alpha_x, \beta_x[\subset A.$$

Koska kahden reaaliluvun välissä on aina rationaalilukuja (katso esim. [7, Lause 1.7.2] tai [8, Corollary 2.4]), voimme löytää väleiltä $]\alpha_x, x[$ ja $]x, \beta_x[$ rationaalilukuja. Valitaan rationaaliluvut r_{n_x} ja r_{m_x}seuraavasti

$$n_x = \min\{i \mid r_i \in]\alpha_x, x[\}, \qquad m_x = \min\{i \mid r_i \in]x, \beta_x[\}.$$

Tällöin

$$]r_{n_x}, r_{m_x}[\subset]\alpha_x, \beta_x[\quad \text{ja} \quad x \in]r_{n_x}, r_{m_x}[.$$

Vaikka alkioiden $x \in A$ joukko on ylinumeroituva, niin välien $]r_{n_x}, r_{m_x}[$ määrä on numeroituva, sillä rationaalilukujen joukko on numeroituva. Lisäksi pätee

$$A = \bigcup_{x \in A}]r_{n_x}, r_{m_x}[, \quad x \in A,$$

joten väite on todistettu. □

Huomattakoon, että avoin joukko voidaan esittää jopa pistevieraiden avoimien välien unionina (katso esim. [8, Proposition 2.8]), mutta emme tarvitse tätä tulosta tällä kurssilla.

Mitta on yhteensopiva topologian kanssa, sillä

Lause 1.2.12 *Avoimet joukot ja suljetut joukot ovat mitallisia.*

Todistus. Jos joukko $A \subset \mathbb{R}$ on avoin, niin voimme kirjoittaa

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k, \text{ missä joukot } I_k \text{ ovat avoimia välejä.}$$

Siis Lauseen 1.2.6 nojalla A on mitallinen, sillä välit ovat mitallisia.

Vastaavasti, jos A on suljettu, niin $\mathbb{R} \setminus A$ on avoin ja siis mitallinen. Näin ollen myös joukko

$$A = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus A)$$

on mitallinen. □

Esitämme tärkeät joukkoja koskevat mitan konvergenssilauseet.

Lause 1.2.13 (a) *Jos jono* (E_k) *on kasvava jono mitallisia joukkoja, eli* $E_k \subset E_{k+1}$*, niin*

$$\lim_{k\to\infty} m(E_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

(b) *Jos jono* (E_k) *on vähenevä jono mitallisia joukkoja ja jostakin arvosta* k *lähtien* $m(E_k) < \infty$*, niin*

$$\lim_{k\to\infty} m(E_k) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

Todistus. Kohta (a): Merkitsemme

$$F_k = E_k \setminus E_{k-1} = E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i.$$

Tällöin joukot F_k ovat keskenään pistevieraita ja

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

sekä voimme soveltaa Lemmaa 1.2.8:

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(F_k).$$

Toisaalta joukkojen F_k määrittelyn perusteella näemme, että

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k.$$

Kun näiden mittoihin vielä sovellamme joukkojen F_k pistevierautta, niin saamme

$$m(E_n) = \sum_{k=1}^{n} m(F_k).$$

Näin ollen edelliset yhtälöt yhdistämällä ja ottamalla raja-arvon $n \to \infty$ päättelemme, että

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(F_k) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Kohta (b): Tarkastelemme joukkoja $(E_k \setminus E_n)$, missä $n \geq k$. Tällöin

$$(E_k \setminus E_n)_{n \geq k}$$

on kasvava jono mitallisia joukkoja, jolloin kohdan (a) perusteella saamme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} m(E_k \setminus E_n) &= m\left(\bigcup_{n\geq k}(E_k \setminus E_n)\right) \\ &= m\left(E_k \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right), \end{aligned} \tag{1.2}$$

sillä jono (E_k) on vähenevä. Koska voimme kirjoittaa joukon E_k muotoon

$$E_k = (E_k \setminus E_n) \bigcup E_n$$

ja joukot $E_k \setminus E_n$ ja E_n ovat pistevieraita, niin saamme

$$m(E_k) = m(E_k \setminus E_n) + m(E_n).$$

Koska oletimme, että jostakin indeksistä k alkaen joukkojen E_k mitat ovat äärellisiä, niin voimme vähentää tarpeeksi suurilla arvoilla n molemmilta puolilta joukon E_n mitan. Siten saamme

$$m(E_k \setminus E_n) = m(E_k) - m(E_n). \tag{1.3}$$

Aivan samoin

$$m\left(E_k \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m(E_k) - m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right). \tag{1.4}$$

Koska $m(E_k) < \infty$ ja

$$\lim_{n\to\infty} m(E_k \setminus E_n)$$

on olemassa, niin

$$\lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

on olemassa. Näin ollen yhdistämällä tulokset (1.3), (1.4) ja (1.2) saamme

$$\lim_{n\to\infty} m\,(E_k) - m(E_n) = m\,(E_k) - m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

Siis yhtälö

$$\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

pätee, ja väite on voimassa. $\square$

Oletus $m(E_k) < \infty$ on oleellinen edellisen lauseen (b) kohdassa. Nimittäin koska välit ovat mitallisia Seurauksen 1.2.7 nojalla, niin

$$\begin{aligned} m\left([0,\infty[\right) &= \infty, \\ m\left([n,\infty[\right) &= \infty. \end{aligned}$$

Siis saamme

$$\lim_{n\to\infty} m\left([n,\infty[\right) = \infty,$$

mutta

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [n,\infty[\right) = m\left(\emptyset\right) = 0.$$

Luku 2

Yleistä mittateoriaa

2.1 Mitta

Edellisessä luvussa löysimme reaalilukujen joukossa ulkomitan avulla mitan m, joka on kuvaus mitallisten joukkojen joukolta $\mathcal{M}$ ei-negatiivisille laajennetuille reaaliluvuille:

$$m : \mathcal{M} \to [0, \infty].$$

Totesimme, että mitallisten joukkojen joukko $\mathcal{M}$ toteuttaa seuraavat ehdot:

1. Jos A on mitallinen, niin sen komplementti on myös mitallinen:

$$A \in \mathcal{M} \;\Rightarrow \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{M}. \tag{2.1}$$

2. Mitallisten joukkojen numeroituvat yhdisteet ovat mitallisia:

$$A_i \in \mathcal{M},\; i \in \mathbb{N} \;\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}.$$

Lisäksi todistimme, että tämä mitta toteuttaa seuraavat ehdot:

$$\begin{aligned} m(\emptyset) &= 0, \\ m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i), \end{aligned}$$

kun joukot E_i ovat pistevieraita.

Tässä luvussa tulemme yleistämään mitan myös muihin avaruuksiin kuin $\mathbb{R}$. Ensin kuitenkin määrittelemme σ-algebran, jonka malli on joukon $\mathbb{R}$ mitallisten joukkojen joukko.

Määritelmä 2.1.1 *Olkoon X joukko. Merkitään joukon X kaikkien osajoukkojen joukkoa $\mathcal{P}(X)$. Tällöin epätyhjää joukkoluokkaa*

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$$

sanotaan algebraksi, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) *Jos joukko A kuuluu joukkoon $\mathcal{B}$, niin sen komplementti kuuluu myös joukkoon $\mathcal{B}$:*

$$A \in \mathcal{B} \ \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{B}.$$

(2) *Jos joukot A ja B kuuluvat joukkoon $\mathcal{B}$, niin niiden yhdiste kuuluu myös joukkoon $\mathcal{B}$:*

$$A,\ B \in \mathcal{B} \ \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}.$$

Algebraa kutsutaan σ-algebraksi, jos lisäksi on voimassa:

(3) *Kaikki joukkoon $\mathcal{B}$ kuuluvien joukkojen numeroituvat yhdisteet kuuluvat joukkoon $\mathcal{B}$:*

$$A_i \in \mathcal{B}, i \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B}.$$

Esimerkkejä σ-algebroista ovat reaalilukujen joukon mitallisten joukkojen luokka sekä kaikkien joukon X osajoukkojen joukko $\mathcal{P}(X)$.

On syytä huomata, että jos $\mathcal{B}$ on σ-algebra joukossa X, niin $X \in \mathcal{B}$ ja $\emptyset \in \mathcal{B}$. Nimittäin jos $A \in \mathcal{B}$, niin ehdon (1) mukaan myös $X \setminus A \in \mathcal{B}$. Tällöin ehdon (3) mukaan myös $X = A \bigcup (X \setminus A)$ ja edellen $\emptyset \in \mathcal{B}$. Lisäksi, jos $A_i \in \mathcal{B}$, niin

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B}. \tag{2.2}$$

Tämä johtuu siitä, että

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (X \setminus A_i) \in \mathcal{B}.$$

Toisaalta voimme kirjoittaa

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (X \setminus A_i) = X \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i,$$

joten

$$X \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B},$$

mistä seuraa ehdon (1) nojalla, että myös

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B},$$

jos $A_i \in \mathcal{B}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

Lause 2.1.2 *Jos $\mathcal{A}$ on joukkoperhe joukon X osajoukkoja, niin on olemassa pienin σ-algebra, joka sisältää joukon $\mathcal{A}$.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{A}$ joukkoperhe joukon X osajoukkoja. Joukon X kaikkien osajoukkojen joukko $\mathcal{P}(X)$ on σ-algebra, ja toisaalta

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X).$$

Merkitsemme seuraavasti

$$\mathcal{B} = \bigcap_{\mathcal{F}\ \sigma\text{-algebra},\ \mathcal{A}\subset\mathcal{F}} \mathcal{F}\ .$$

Toisin sanoen $\mathcal{B}$ on leikkaus kaikista joukon $\mathcal{A}$ sisältävistä σ-algebroista. Tällöin $\mathcal{B}$ on itsekin σ-algebra, sillä

(1) Olkoon $A \in \mathcal{B}$. Tällöin $A \in \mathcal{F}$ jokaisella σ-algebralle $\mathcal{F}$, jolle $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Koska joukot $\mathcal{F}$ ovat σ-algebroja, niin ehdon (1) nojalla myös $X \setminus A \in \mathcal{F}$ jokaisella $\mathcal{F}$. Siis $X \setminus A \in \mathcal{B}$, joten ehto (1) on voimassa.

(2) Olkoon nyt $A_i \in \mathcal{B}$, $i \in \mathbb{N}$. Tällöin siis $A_i \in \mathcal{F}$ jokaiselle $\mathcal{F}$, jolle . $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Näin ollen ehdon (2) nojalla myös $\bigcup A_i \in \mathcal{F}$ jokaiselle $\mathcal{F}$, jolle $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, sillä joukot $\mathcal{F}$ ovat σ-algebroja. Mutta nyt $\bigcup A_i \in \mathcal{B}$, joten myös ehto (2) on voimassa, ja $\mathcal{B}$ on siis σ-algebra. $\square$

Määritelmä 2.1.3 *Mitallinen avaruus on pari* $(X, \mathcal{B})$*, missä* X *on joukko ja* $\mathcal{B}$ *on* σ*-algebra joukossa* X*. Perheen* $\mathcal{B}$ *joukkoja kutsutaan mitallisiksi. Mitta on ei-negatiivinen funktio*

$$\mu: \ \mathcal{B} \to [0, +\infty]$$

joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) *Tyhjän joukon mitta on nolla:*

$$\mu(\emptyset) = 0,$$

(2) *Mitta* μ *on täydellisesti additiivinen, eli kun joukot* E_i *ovat pistevieraita, niin*

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Mitta-avaruus on kolmikko $(X, \mathcal{B}, \mu)$*, missä* $\mathcal{B}$ *on* σ*-algebra joukossa* X *ja* μ *on mitta joukossa* $\mathcal{B}$*.*

Otamme pari esimerkkiä näistä:

Esimerkki 1. Olkoon $\mathcal{M}$ Lebesguen mitallisten reaalilukujoukkojen luokka. Tällöin $\mathcal{M}$ on σ-algebra ja edelleen Lebesguen mitta

$$m: \ \mathcal{M} \to [0, +\infty]$$

on mitta sekä kolmikko $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ on mitta-avaruus.

Esimerkki 2. Määrittelemme funktion μ seuraavasti:

$$\mu: \ \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$$

siten, että $\mu(E)$ on joukossa E olevien kokonaislukujen lukumäärä. Tällöin näemme helposti, että ehdot (1) ja (2) ovat voimassa, joten μ on mitta.

Lause 2.1.4 *Olkoon* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *mitta-avaruus. Tällöin, jos* $A,\ B \in \mathcal{B}$ *ja* $A \subset B$*, niin*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

Todistus. Olkoot A, $B \in \mathcal{B}$ siten, että $A \subset B$. Koska $\mathcal{B}$ on σ-algebra, niin $B \setminus A \in \mathcal{B}$. Siten, koska $B \setminus A$ ja A ovat pistevieraita ja $(B \setminus A) \cup A = B$, niin

$$\mu(B \setminus A) + \mu(A) = \mu(B).$$

Koska mitta on ei-negatiivinen funktio, niin saamme siis

$$\mu(A) \leq \mu(B)$$

ja väite on siten todistettu. □

Yleinen mitta toteuttaa samat mittaa koskevat konvergenssilauseet kuin reaalilukujen joukossa määritelty Lebegin mitta.

Lause 2.1.5 *Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Tällöin, jos $E_i \in \mathcal{B}$ ja jono (E_i) on kasvava, eli $E_i \subset E_{i+1}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin*

$$\lim_{i \to \infty} \mu(E_i) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right).$$

Edelleen, jos joukot E_i muodostavat vähenevän jonon, eli $E_{i+1} \subset E_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $\mu(E_i) < \infty$ jostakin arvosta i alkaen, niin

$$\lim_{i \to \infty} \mu(E_i) = \mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i\right).$$

Todistus. Todistus menee samalla tavalla kuin Lauseen 1.2.13 todistus. □

Mitta on määritelty σ-algebrassa, joten kaikkien joukkojen unionit eivät ole mitallisia. Usein haluasimme kuitenkin, että edes joku joukon X osajoukkojen perheestä muodustuisi mitallisista joukoista ja sisältäisi kaikkien joukkojensa unionit. Sanommekin paria (X, τ) *topologiseksi avaruudeksi*, jos $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ on joukon X osajoukkojen perhe, joka toteuttaa ehdot

$X \in \tau$ ja $\emptyset \in \tau$;

jos $U \in \tau$ ja $V \in \tau$, niin $U \cap V \in \tau$;

jos I on mielivaltainen indeksijoukko ja $U_\alpha \in \tau$, niin $\bigcup_{\alpha \in I} U_a \in \tau$.

Topologisen avaruuden (X, τ) joukkoja $U \in \tau$ sanotaan avoimiksi. Joukkoa $V \subset X$ sanotaan suljetuksi, jos $X \setminus V$ on avoin.

Topologia ei ole σ-algebra, mutta sen avulla saadaan σ-algebra.

Määritelmä 2.1.6 *Olkoon $\mathcal{A}$ kaikkien topologisen avaruuden X avoimien joukkojen joukko. Borelin joukkojen luokka on pienin σ-algebra $\mathcal{B}$, joka sisältää avoimet joukot. Jos μ on mitta σ-algebrassa $\mathcal{B}$, niin kolmikkoa $(X, \mathcal{B}, \mu)$ sanotaan Borelin mitta-avaruudeksi ja mittaa μ Borelin mitaksi.*

Borelin joukot voidaan yhtä hyvin määritellä pienimpänä σ-algebrana, joka sisältää suljetut joukot.

On syytä huomata, että Borelin joukkojen luokka reaalilukujen joukossa ei ole sama kuin reaalilukujen joukon mitallisten joukkojen luokka $\mathcal{M}$ (Katso Rudin, luku 2.21).

Määritelmä 2.1.7 *Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Mitta-avaruutta $(X, \mathcal{B}, \mu)$ sanotaan täydelliseksi, jos jokaisen nollamittaisen joukon osajoukko on mitallinen ja siis nollamittainen, eli*

$$A \subset E \;\; ja \; \mu(E) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{B} \;\; ja \; \mu(A) = 0.$$

On helppo huomata, että Lebesguen mitta reaalilukujen joukon kaikkien mitallisten joukkojen luokassa on täydellinen. Sen sijaan Borelin mitta ei ole välttämättä täydellinen (Katso [9, Luku 2.21]). Jokainen mitta-avaruus voidaan kuitenkin laajentaa täydelliseksi kuten seuraava tulos osoittaa.

Lause 2.1.8 *Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Olkoon $\overline{\mathcal{B}}$ joukko, jonka alkioina ovat sellaiset joukon X osajoukot E, joille on olemassa mitalliset joukot A ja B siten, että $A \subset E \subset B$ ja $\mu(B \backslash A) = 0$. Edelleen määritellään $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{B}} \to [0, \infty]$ asettamalla $\overline{\mu}(E) = \mu(A)$. Tällöin mitta-avaruus $\left(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu}\right)$ on täydellinen.*

Todistuksen jätämme harjoitustehtäväksi.

Ensimmäisessä luvussa saimme mitan reaalilukujen joukkoon lähtemällä ulkomitasta. Vastaavalla tavalla saamme yleisessä teoriassa ulkomitasta mitan. Määrittelemme ensin käsitteet.

Määritelmä 2.1.9 *Olkoon X joukko. Funktioita $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ sanotaan ulkomitaksi, jos $\mu^*(\emptyset) = 0$ ja μ^* on subadditiivinen, eli*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

jokaiselle $E_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$. Joukkoa E sanotaan mitalliseksi, jos

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E)$$

jokaiselle joukon X osajoukolle A.

Vastaavasti kuin ensimmäisessä luvussa voimme todistaa seuraavan tuloksen (Ks. [8, Luku 12.1]).

Lause 2.1.10 *Olkoon X joukko ja $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ulkomitta. Tällöin ulkomitan μ^* suhteen mitallisten joukkojen joukko on σ-algebra ja funktion μ^* rajoittuma tähän joukkoon on täydellinen mitta.*

On helpompi löytää täydellisesti additiivinen funktio algebrassa kuin σ-algebrassa. Carathéodoryn lause osoittaa, että näinkin voidaan saada mitta-avaruus.

Lause 2.1.11 (CARATHÉODORY) *Olkoon $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ täydellisesti additiivinen algebrassa $\mathcal{A}$ ja $\mu(\emptyset) = 0$. Merkitään mitan μ indusoimaa ulkomittaa μ^*, ts.*

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \mid A_i \in \mathcal{A}, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset E \right\}.$$

Tällöin ulkomitan μ^* rajoittuma mitallisten joukkojen luokkaan on funktion μ laajennus mitaksi σ-algebraan, joka sisältää μ^*-mitalliset joukot ja joukon $\mathcal{A}$ joukot. Lisäksi, jos μ on äärellinen, niin laajennus on äärellinen ja jos μ on σ-äärellinen, niin laajennus on ainoa mitan μ laajennus pienimpään σ-algebraan, joka sisältää joukon $\mathcal{A}$.

Katso tarkemmin [8, s.253–255].

2.2 Mitalliset funktiot

Integraalia emme voi määritellä kaikille funktioille. Määrittelemme integraalin niin sanotuille mitallisille funktioille, joiden määritettelemiseksi todistamme ensin seuraavan lauseen:

Lause 2.2.1 *Olkoon $(X, \mathcal{B})$ mitallinen avaruus ja olkoon lisäksi f laajennetusti reaaliarvoinen funktio joukossa $D \in \mathcal{B}$. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:*

(i) $\{x \in D \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(ii) $\{x \in D \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{B} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(iii) $\{x \in D \mid f(x) < \alpha\} \in \mathcal{B} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(iv) $\{x \in D \,|\, f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{B} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Todistus. Todistamme ketjun (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(i).
(i)⇒(ii): Kirjoitamme

$$\{x \in D \,|\, f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in D \,|\, f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\}.$$

Ehdon (i) nojalla

$$\{x \in D \mid f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{B}.$$

Koska $\mathcal{B}$ on σ-algebra, niin samoin on myös leikkaus

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in D \,|\, f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{B},$$

joten (ii) on voimassa.
(ii)⇒(iii): Huomaamme, että

$$\{x \in D \mid f(x) < \alpha\} = X \setminus \{x \in D \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{B},$$

sillä $\{x \in D \,|\, f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{B}$ ja $\mathcal{B}$ on σ-algebra.
Kohdat (iii)⇒(iv) ja (iv)⇒(i) tulevat aivan samalla tavalla kuin vastaavat kohdat (i)⇒(ii) ja (ii)⇒(iii), joten niitä on turha kirjoittaa erikseen. □

Tämän perusteella määrittelemme mitallisen funktion seuraavalla tavalla:

Määritelmä 2.2.2 *Olkoon $(X, \mathcal{B})$ mitallinen avaruus. Funktio*

$$f: \; X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

on mitallinen, jos joku edellisen lauseen ehdoista (i)–(iv) on voimassa, kun $D = X$.

Toisaalta Lauseen 2.2.1 nojalla, jos yksi ehdoista on voimassa, niin kaikki muutkin ovat voimassa. Tämä määritelmä on hiukan ehkä omituinen. Seuraavan lauseen jälkeen saamme paremman kuvan mitallisista funktioista.

Lause 2.2.3 *Olkoon $(X, \mathcal{B})$ mitallinen avaruus. Funktio*

$$f: \; X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

on mitallinen, jos ja vain jos jokaisen rajoitetun avoimen välin alkukuva on mitallinen ja $f^{-1}(\{-\infty\})$ (vastaavasti $f^{-1}(\{+\infty\})$) on mitallisia.