Todistus. Olkoon ensiksi funktio f mitallinen. Koska voimme kirjoittaa

$$]a,b[= [-\infty, b[\setminus [-\infty, a]\,,$$

niin

$$f^{-1}(]a,b[) = f^{-1}([-\infty, b[) \setminus f^{-1}([-\infty, a]).$$

Yhtälön oikealla puolella molemmat joukot ovat mitallisia, joten niiden komplementti on mitallinen, eli $f^{-1}(]a,b[)$ on mitallinen. Lisäksi, koska

$$\{x \mid f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \mid f(x) < -n\}\,,$$

niin $f^{-1}(\{-\infty\})$ on mitallinen. Vastaavasti myös saamme joukon $f^{-1}\{+\infty\}$ mitallisuuden.

Oletamme kääntäen, että jokaisen rajoitetun avoimen välin alkukuva on mitallinen ja että $f^{-1}(\{-\infty\})$ on mitallinen. Koska

$$\{x \mid f(x) < \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \mid \alpha - n < f(x) < \alpha\} \cup f^{-1}(\{-\infty\})$$

ja oikealla kaikki joukot ovat mitallisia, niin väite on siten voimassa myös kääntäen. $\square$

Aikaisemmista analyysin kursseista muistamme, että funktio on jatkuva, jos ja vain jos jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin. Siten mitalliset funktiot ovat eräänlainen yleistys jatkuvista funktioista.

Määritelmä 2.2.4 *Olkoon* $(X, \mathcal{B})$ *mitallinen avaruus. Funktio*

$$f:\ A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

on mitallinen, jos A *on mitallinen ja*

$$\{x \mid f(x) < \alpha\}$$

on mitallinen kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$.

Jos funktio

$$f:\ A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

on mitallinen, niin myös funktio $g:\ X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ f(x), & x \in A \end{cases}$$

on mitallinen.

Mikäli tiedämme, että funktio

$$f: \ X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

on mitallinen, niin tällöin

$$\{x \mid f(x) = a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \mid a + \frac{1}{n} > f(x) > a - \frac{1}{n} \right\},$$

missä yhtälön vasemmalla puolella olevat leikkauksen joukot ovat mitallisia. Siis joukko $f^{-1}(\{a\})$ on mitallinen kaikilla arvoilla $a \in \mathbb{R}$.

Olkoon $(X, \mathcal{B})$ mitallinen avaruus, missä $\mathcal{B}$ on topologisen avaruuden X Borelin joukkojen luokka. Jos funktio

$$f: \ X \to \mathbb{R}$$

on jatkuva, niin silloin jokaisen avoimen joukon alkukuva on jatkuvuuden perusteella avoin. Koska kaikki avoimet joukot ovat mitallisia, niin tällöin voimme sanoa, että jokainen jatkuva funktio on mitallinen. Luonnollisestikaan väite ei päde kääntäen: mitallisen funktion ei välttämättä tarvitse olla jatkuva.

Lause 2.2.5 *Olkoon $(X, \mathcal{B})$ mitallinen avaruus ja olkoot funktiot $f: \ X \to \mathbb{R}$ ja $g: \ X \to \mathbb{R}$ mitallisia. Tällöin funktiot*

$$f + g\,, \quad fg, \quad c + f, \quad cf\,, \; f - g, \; \textit{missä} \; c \in \mathbb{R},$$

ovat mitallisia. Lisäksi funktio $\frac{1}{f}$ on mitallinen, mikäli $f(x) \neq 0$ kaikille $x \in X$.

Todistus. Nämä todistukset saamme suoraan mitallisuuden määritelmästä. Funktion $c + f$ mitallisuuden todistamiseksi huomaamme, että

$$\{x \mid (c + f)(x) < \alpha\} = \{x \mid f(x) < \alpha - c\}.$$

Mutta oikea puoli on mitallinen, sillä f on mitallinen. Tällöin siis myös $c + f$ on mitallinen.

Seuraavaksi todistamme funktion cf mitallisuuden. Jos $c = 0$, niin $cf = 0$ identtisesti. Tällöin

$$\{x \in X \mid cf(x) < \alpha\} = \begin{cases} X, & \alpha > 0 \\ \emptyset, & \alpha \leq 0 \end{cases}.$$

Mutta sekä tyhjä joukko, että koko avaruus kuuluvat σ-algebraan, joten tällöin $cf \equiv 0$ on mitallinen. Jos sitten $c \neq 0$, niin saamme

$$\{x \mid cf(x) < \alpha\} = \begin{cases} \{x \mid f(x) < \frac{\alpha}{c}\}, & c > 0 \\ \{x \mid f(x) > \frac{\alpha}{c}\}, & c < 0 \end{cases},$$

joten myös tällöin cf on mitallinen.

Funktioiden $f+g$ ja $f-g$ mitallisuuden todistamiseksi huomaamme, että

$$\begin{aligned} \{x \mid f(x) + g(x) < \alpha\} &= \{x \mid f(x) < \alpha - g(x)\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \mid f(x) < r\} \cap \{x \mid \alpha - g(x) > r\}. \end{aligned}$$

Jälleen yhtälön oikealla puolella olevat joukot ovat mitallisia, joten myös niiden leikkaus on mitallinen. Tällöin siis $f+g$ on mitallinen. Vastaavasti $f-g$ mitallisuus seuraa tästä suoraan. Nimittäin jos g on mitallinen funktio, niin myös $-g$ on mitallinen.

Funktion fg mitallisuuden osoittaminen käy parhaiten huomaamalla, että

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right).$$

Tällöin siis riittää osoittaa, että f^2 on mitallinen. Tämän mitallisuus puolestaan tulee siitä, että

$$\{x \mid f^2(x) < \alpha\} = \begin{cases} \emptyset, & \alpha \leq 0 \\ \{x \mid -\sqrt{\alpha} < f(x) < \sqrt{\alpha}\}, & \alpha > 0 \end{cases}.$$

Eli f^2 on mitallinen ja siten fg on mitallinen.

Lopuksi käsittelemme vielä funktiota $\frac{1}{f}$. Oletetaan, että $f(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned} \left\{x \mid \frac{1}{f(x)} < \alpha\right\} &= (\{x \mid 1 < \alpha f(x)\} \cap \{x \mid f(x) > 0\}) \\ &\quad \bigcup (\{x \mid 1 > \alpha f(x)\} \cap \{x \mid f(x) < 0\}) \end{aligned}$$

ja siis myös $\frac{1}{f}$ on mitallinen. $\square$

Lause 2.2.6 *Olkoon $(X, \mathcal{B})$ mitallinen avaruus ja olkoot funktiot*

$$f_n : \; X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

mitallisia funktioita. Tällöin seuraavat funktiot

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n,$$
$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k \ge n} f_k \right), \quad \liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k \ge n} f_k \right)$$

ovat mitallisia. Lisäksi, jos

$$\lim_{n\to\infty} f_n$$

on olemassa, niin se on mitallinen.

Todistus. Supremumille voimme kirjoittaa

$$\left\{ x \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > \alpha \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ x \mid f_n(x) > \alpha \}$$

jokaiselle reaaliluvulle α. Koska oikealla puolella unioniin sisältyvät joukot ovat mitallisia, niin myös kyseinen unioni on mitallinen. Siis $\sup f_n$ on mitallinen.

Koska

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = -\sup_{n \in \mathbb{N}} (-f_n),$$

niin edellisen perusteella myös $\inf f_n$ on mitallinen. Mutta koska sekä $\sup f_n$ että $\inf f_n$ ovat mitallisia, niin myös funktiot

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k \ge n} f_k \right) &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \ge n} f_k \\ \liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k \ge n} f_k \right) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \ge n} f_k \end{aligned}$$

ovat mitallisia.

Lopuksi tarkastelemme raja-arvoa $\lim_{n\to\infty} f_n$. Jos kyseinen raja-arvo on olemassa, niin tällöin

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Siis tällöin edellisten kohtien mukaan myös $\lim_{n\to\infty} f_n$ on mitallinen. $\square$

Seuraavaksi tutustumme yksinkertaisiin funktioihin. Tällaiset funktiot ovat sellaisia, joiden arvojoukko käsittää vain äärellisen määrän erisuuria alkioita. Tulemme huomaamaan, että voimme esittää jokaisen mitallisen reaaliarvoisen funktion tällaisten yksinkertaisten funktioiden avulla. Myöhemmin käytämme yksinkertaisia funktioita integraalin määrittelemisessä. Ensin kuitenkin määrittelemme joukon karakteristisen funktion.

Määritelmä 2.2.7 *Olkoon X joukko ja E joukon X osajoukko. Tällöin joukon $E \subset X$ karakteristinen funktio määritellään seuraavasti:*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 0, & x \notin E \\ 1, & x \in E. \end{cases} .$$

Tämä ei tietenkään ole ainoa tapa määritellä karakteristista funktiota. Aivan yhtä hyvin voisimme määritellä sen esimerkiksi saamaan pisteessä x arvon 4.23, kun $x \notin E$, ja arvon 0, kun $x \in E$. Myös tällöin se karakterisoisi joukkoa E yhtä hyvin kuin edellä oleva määritelmä.

Määritelmä 2.2.8 *Olkoon $(X, \mathcal{B})$ mitallinen avaruus. Mitallista funktiota*

$$f: \ X \to \mathbb{R}$$

sanotaan yksinkertaiseksi, jos $f(X)$ on äärellinen.

Mikäli funktio $f: \ X \to \mathbb{R}$ on yksinkertainen, niin voimme määritellä pistevieraat joukot E_i seuraavasti

$$E_i = \{x \mid f(x) = a_i\},$$

missä luvut a_i ovat reaalilukuja. Tällöin voimme esittää funktion f muodossa

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x),$$

missä n on jokin äärellinen luonnollinen luku. Käänteisesti jokainen tätä muotoa oleva funktio on yksinkertainen.

Huomautamme, että yksinkertainen funktio ei ole sana kuin porrasfunktio.

Seuraavaksi osoitamme, että voimme kirjoittaa jokaisen reaaliarvoisen mitallisen funktion yksinkertaisten funktioiden avulla. Todistamme tämän ensiksi positiivisille funktioille, jonka jälkeen saamme tuloksen helposti yleistetyksi.

Lause 2.2.9 *Olkoon $(X, \mathcal{B})$ mitallinen avaruus ja olkoon $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ei-negatiivinen mitallinen funktio. Tällöin on olemassa kasvava jono yksinkertaisia funktioita $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siten, että*

$$f = \lim_{n\to\infty} \phi_n.$$

Todistus. Määrittelemme joukot E_k^n jokaiselle $k = 1, 2, \dots, n2^n$ ja $n \in \mathbb{N}$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} E_k^n &= \left\{ x \in X \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}, \\ E_{n2^n+1}^n &= \{ x \in X \mid f(x) \geq n \}, \end{aligned}$$

missä. Tällöin selvästi joukot E_k^n ovat pistevieraita ja

$$X = \bigcup_{k=1}^{n2^n+1} E_k^n.$$

Tämän jälkeen valitsemme jonon yksinkertaisia funktioita

$$\phi_n = \sum_{k=1}^{n2^n+1} \left(\frac{k-1}{2^n} \right) \chi_{E_k^n}.$$

Siis funktion ϕ_n arvo pisteessä $x \in E_k^n$ on $\frac{k-1}{2^n}$ $(\leq f(x))$.

Ensiksi osoitamme, että kyseessä on kasvava jono funktioita, eli että $\phi_n \leq \phi_{n+1}$. Olkoon

$$x \in X = \bigcup_{k=1}^{n2^n+1} E_k^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin on olemassa jokin arvo k siten, että $x \in E_k^n$. Oletetaan aluksi, että $k \leq n2^n$. Tällöin voimme kirjoittaa joukon E_k^n myös muotoon

$$\begin{aligned} E_k^n &= E_{2k-1}^{n+1} \bigcup E_{2k}^{n+1} \\ &= \left\{ x \in X \mid \tfrac{2k-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \tfrac{2k-1}{2^{n+1}} \right\} \bigcup \left\{ x \in X \mid \tfrac{2k-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \tfrac{2k}{2^{n+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Näin ollen joko $x \in E_{2k-1}^{n+1}$ tai $x \in E_{2k}^{n+1}$. Siis

$$\phi_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leq \begin{cases} \frac{2k-2}{2^{n+1}} = \phi_{n+1}(x), & x \in E_{2k-1}^{n+1}, \\ \frac{2k-1}{2^{n+1}} = \phi_{n+1}(x), & x \in E_{2k}^{n+1}. \end{cases}$$

Jos $k = n2^n + 1$, niin

$$E_k^n = \bigcup_{i=n2^{n+1}+1}^{(n+1)2^{n+1}+1} E_i^{n+1}.$$

Siis molemmissa tapauksessa $\phi_n(x) \le \phi_{n+1}(x)$ jokaisella arvolla $n \in \mathbb{N}$, joten funktiot muodostavat kasvavan jonon.

Tämän jälkeen on vielä osoitettava, että

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n = f.$$

Olkoon $x \in X$ ja oletetaan, että $f(x) = \infty$. Tällöin joukkojen E_k^n määritelmän mukaan $x \in E_{n2^n+1}^n$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$. Siten

$$f(x) \ge \phi_n(x) \ge n$$

jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, joten saamme

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \infty = f(x).$$

Oletamme sitten, että $f(x) < \infty$. Kun $n > f(x)$, niin

$$x \notin E_{n2^n+1}^n.$$

Olkoon $\epsilon > 0$ ja valitaan n_ϵ siten, että

$$\frac{1}{2^{n_\epsilon}} < \epsilon.$$

Tällöin, kun

$$n > \max\{n_\epsilon, f(x)\},$$

niin on voimassa

$$\phi_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n}$$

jollakin arvolla k. Siten

$$f(x) - \phi_n(x) < \frac{1}{2^n} < \epsilon$$

eli

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x)$$

ja väite on siten todistettu. □

Tämän edellä olevan lauseen voimme laajentaa koskemaan kaikkia reaaliarvoisia mitallisia funktioita seuraavasti:

Jos funktio $f: X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ on mitallinen, niin myös funktiot

$$\begin{aligned} f^{+}(x) &= \sup(f(x), 0) = \max(f(x), 0), \\ f^{-}(x) &= \sup(-f(x), 0) = \max(-f(x), 0) \end{aligned}$$

ovat mitallisia. Molemmat ovat ei-negatiivisia, joten edellisen lauseen nojalla on olemassa yksinkertaisten funktioiden kasvavat jonot $(\phi_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(\phi_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ siten, että seuraavat ovat voimassa:

$$\begin{aligned} f^{+} &= \lim_{n\to\infty} \phi_n^{+}, \\ f^{-} &= \lim_{n\to\infty} \phi_n^{-}. \end{aligned}$$

Toisaalta funktio $\phi_n^+ - \phi_n^-$ on selvästikin yksinkertainen. Näin ollen saamme

$$f = f^{+} - f^{-} = \lim_{n\to\infty} (\phi_n^{+} - \phi_n^{-}).$$

Siten jokainen mitallinen funktio on yksinkertaisten funktioiden jonon rajafunktio.

Seuraavaksi otamme käyttöön uuden käsitteen. Sanomme, että jokin ominaisuus on voimassa melkein kaikkialla (=a.e. =almost everywhere), jos sen joukon, jossa se ei ole voimassa, mitta on nolla.

Huomattakoon, että joissakin lähteissä on käsite a.e. määritelty hivenen eri tavalla, mutta sillä ei ole teorian kannalta oleellista merkitystä.

Esimerkiksi jos sanomme, että $f = g$ a.e., niin se tarkoittaa seuraavaa:

$$\mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Näin voimme todeta seuraavan ilmeisen lauseen:

Lause 2.2.10 *Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ täydellinen mitta-avaruus. Jos funktio $f: X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ on mitallinen ja funktio $g: X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ toteuttaa ehdon $f = g$ a.e., niin g on mitallinen. Erityisesti väite pätee mitta-avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, missä m on Lebesguen mitta ja $\mathcal{M}$ Lebesguen mitallisten joukkojen luokka.*

Todistus. Sivuutamme helppona. □

Huomautamme, että edellisessä lauseessa tarvitaan mitta-avaruuden täydellisyyttä eli sitä, että nollamittaisen joukon osajoukot ovat nollamittaisia.

Palautamme mieliimme funktiojonon suppenemisen ja tasaisen suppenemisen.

Määritelmä 2.2.11 *Olkoot $f_i: A \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ funktioita. Sanomme, että funktiojono $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suppenee pisteessä $x \in A$, jos*

$$\lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x)$$

on äärellisenä olemassa. Toisin sanoen jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa $n_\epsilon(x)$ siten, että

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \ \ \textit{jokaiselle } n > n_\epsilon.$$

Lisäksi funktiojono suppenee tasaisesti, jos jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa n_ϵ siten, että

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \textit{ jokaiselle } n > n_\epsilon \textit{ ja } x \in A.$$

Jos funktiojono suppenee tasaisesti, niin se myös suppenee. Kääntäen tämä ei kuitenkaan ole välttämättä voimassa. Valitsemme esimerkiksi $A = [0,1]$ ja jonon funktioita $f_n: A \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & 0 \le x \le \frac{1}{2n}, \\ 2 - 2nx, & \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & x \ge \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Tällöin selvästi

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0.$$

Olkoon $\epsilon > 0$ ja valitaan $n_0 > \frac{1}{x}$. Tällöin $f_n(x) = 0$ kaikilla $n > n_0$, mutta $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = 1$. Siis suppeneminen ei ole tasaista.

Funktiojonon tasaisen suppenemisen voi myös ilmaista kuten seuraavassa lemmassa.

Lemma 2.2.12 *Funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f, jos ja vain jos*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in A}|f(x) - f_n(x)|\right) = 0$$

Todistus. Sivuutetaan helppona. □

Nyt olemme valmiit todistamaan, että mitallisten funktioiden suppeneminen on aina "melkein tasaista".

Lause 2.2.13 (EGOROFFIN LAUSE) *Olkoon* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jono mitta-avaruudessa* $(X,\mathcal{B},\mu)$ *mitallisia funktioita* $f_n : A \to \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ *ja olkoon* $\mu(A) < \infty$. *Jos funktiojono* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suppenee melkein kaikkialla, niin jokaista* $\epsilon > 0$ *kohti on olemassa joukko* F,*jossa jono* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suppenee tasaisesti ja* $\mu(A\setminus F) < \epsilon$.

Todistus. Oletetaan, että mitallisten funktioiden jono (f_n) suppenee melkein kaikkialla. Merkitään jonon (f_n) suppenemisjoukkoa B. Tällöin siis $\mu\left(A\backslash B\right) = 0$. Määritellemme funktion $f : A \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right), & \text{kun } x \in B, \\ 0, & \text{kun } x \in A\backslash B. \end{cases}$$

Funktio f on selvästi mitallinen.

Määrittelemme joukot E_n^k seuraavasti:

$$E_n^k = \bigcap_{m=n}^{\infty} \left\{ x \mid |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Tällöin $E_n^k \subset E_{n+1}^k$. Koska f_m ja f ovat mitallisia, niin joukot E_n^k ovat mitallisia. Koska jono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee joukossa B, niin

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^k \supset B,$$

mistä seuraa $\mu(A \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^k) = 0$. Joukot $A \setminus E_n^k$ muodostavat vähenevän jonon joukkoja. Koska $\mu\left(A\right) < \infty$, soveltamalla Lausetta 2.1.5 saamme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mu\left(A \setminus E_n^k\right) &= \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(A \setminus E_n^k\right)\right) \\ &= \mu\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^k\right) = 0. \end{aligned}$$

Näin ollen on olemassa $n_k \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\mu\left(A \setminus E_n^k\right) < \frac{\epsilon}{2^k}$$

kaikilla $n \geq n_k$. Olkoon nyt

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}^k.$$

Tällöin joukko F on mitallinen ja lisäksi

$$\begin{aligned}\mu(A \setminus F) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A \setminus E_{n_k}^k\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A \setminus E_{n_k}^k\right) < \epsilon.\end{aligned}$$

Lopuksi osoitamme, että suppeneminen on tässä joukossa F tasaista. Olkoon nyt $x \in F$ ja valitsemme luvun $k_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{k_0} < \epsilon$. Koska $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}^k$, niin x kuuluu jokaiseen joukkoon $E_{n_k}^k$ ja erityisesti $x \in E_{n_{k_0}}^{k_0}$. Siis

$$x \in \bigcap_{m=n_{k_0}}^{\infty} \left\{x \mid |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k_0}\right\}.$$

eli

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k_0} < \epsilon \text{ jokaiselle } m \geq n_{k_0}.$$

Näin ollen suppeneminen on tasaista joukossa F. $\square$

Huomautamme, että Egoroffin lause ei päde välttämättä, jos $\mu(A) = \infty$. Egoroffin lause ei myöskään päde välttämättä, jos joukko A voidaan esittää muodossa $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, missä $\mu(A_n) < \infty$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$. Todistuksen jätämme harjoitustehtäväksi.

Luku 3

Lebesguen integraali

3.1 Perusominaisuudet

Tässä luvussa määrittelemme Lebesguen integraalin. Määrittelemme sen ensin yksinkertaisille funktioille ja yleistämme sen sitten koskemaan myös muita funktioita.

Määritelmä 3.1.1 *Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Lisäksi olkoot joukot E_i pistevieraita ja funktio*

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$$

yksinkertainen. Funktion ϕ integraali on

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i),$$

mikäli kyseinen summa on määritelty. Lisäksi funktio ϕ on integroituva, jos

$$-\infty < \int \phi \, d\mu < +\infty,$$

eli jos kyseinen summa on äärellinen.

Huomattakoon, että määrittelemme

$$\begin{array}{ll} \infty + \infty = \infty, & x \pm \infty = \pm\infty, \quad x \in \mathbb{R} \\ -\infty - \infty = -\infty, & 0 \cdot \pm\infty = 0, \\ x \cdot \pm\infty = \mp\infty, \quad x < 0, x \in \mathbb{R} & x \cdot \pm\infty = \pm\infty, \quad x > 0, x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Erotusta $\infty - \infty$ ei voida määritellä. Siis jos yksinkertainen funktio saa positiivisen arvon ääretön mittaisessa joukossa ja negatiivisen arvon ääretönmittaisessa joukossa, niin sen integraalia ei ole määritelty.

Tämän ja Riemannin integraalin suurin ero on siinä, että Riemannin integraalissa jaamme lähtöjoukon osaväleihin ja laskemme ylä- ja alasummia, kun taas tässä suoritamme jaon arvojoukon suhteen. Siis kun funktio saa arvon c_i jossakin joukossa E_i, niin kerromme kyseisen arvon vastaavan joukon mitalla ja summaamme yli koko arvojoukon.

Tässä vaiheessa on aiheellista tarkastaa, että integraali on hyvin määritelty. Kirjoitamme yksinkertaisen funktion ϕ kahdella eri tavalla: Olkoon

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{F_j},$$

missä joukot E_i ovat keskenään pistevieraita ja samoin myös joukot F_j. Oletamme, että summa

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i)$$

on määritelty. Tällöin

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X = \bigcup_{j=1}^{m} F_j.$$

Lisäksi on huomattava, että

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{m} E_i \cap F_j$$

ja että

$$c_i = b_j \quad \text{kaikilla } x \in E_i \cap F_j.$$

Näin ollen voimme kirjoittaa mitan additiivisuuden perusteella

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(F_j).
\end{aligned}$$

Siis integraali on hyvin määritelty.

Seuraavassa katsomme muutamia tämän integraalin peruslaskusääntöjä.

Lause 3.1.2 *Olkoot ϕ ja ψ yksinkertaisia funktioita mitta-avaruudessa $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Tällöin, mikäli integraalit ovat määritelty, ovat seuraavat laskusäännöt voimassa:*

(a) *Yhteenlasku:*

$$\int (\psi + \phi)\ d\mu = \int \psi\ d\mu + \int \phi\ d\mu$$

mikäli oikea puoli on määritelty.

(b) *Vakiolla kertominen: Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\int \alpha\phi\, d\mu = \alpha \int \phi\, d\mu.$$

(c) *Jos $\phi \geq \psi$, niin*

$$\int \phi\, d\mu \geq \int \psi\, d\mu.$$

(d) *Itseisarvo epäyhtälö:*

$$|\int \phi\, d\mu| \leq \int |\phi|\ d\mu$$

mikäli vasen puoli on olemassa.

Todistus. Todistamme malliksi vain kohdan (a). Muut kohdat tulevat aivan vastaanlaisilla laskuilla. Olkoot siis funktiot ϕ ja ψ yksinkertaisia ja kirjoitamme ne muotoon

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \quad \text{ja} \quad \psi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{F_j},$$

missä joukot E_i ovat keskenään pistevieraat ja samoin myös joukot F_j. Funktioiden summa on

$$\begin{aligned} \phi + \psi &= \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} + \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{F_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) \chi_{E_i \cap F_j}, \end{aligned}$$

sillä muistamme, että

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{m} E_i \cap F_j.$$

Näin voimme laskea integraalin seuraavasti

$$\begin{aligned}
\int (\phi + \psi)\ d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j)\mu(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \mu(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(F_j) + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) \\
&= \int \phi\ d\mu + \int \psi\ d\mu,
\end{aligned}$$

mikäli $\int \phi\ d\mu + \int \psi\ d\mu$ on määritelty. Näin ollen kohta (a) on todistettu. Muut kohdat ovat samanlaista summilla leikkimistä. $\square$

Seuraavassa yleistämme integraalin koskemaan muitakin kuin yksinkertaisia funktioita.

Määritelmä 3.1.3 *Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Jos funktio $f : X \to [0, \infty]$ mitallinen, niin määrittelemme sen integraalin seuraavasti*

$$\int f\, d\mu = \sup \left\{ \int \phi\, d\mu \mid \quad \phi \text{ yksinkertainen ja } \phi \leq f \right\}.$$

Jos taas funktio $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ on mielivaltainen mitallinen funktio, merkitsemme

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{ja} \quad f^- = \max\{-f, 0\},$$

ja määrittelemme sen integraalin asettamalla

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu,$$

mikäli oikea puoli on määritelty. Funktion f integraali yli mitallisen joukon E on

$$\int_E f\ d\mu = \int f \chi_E\, d\mu.$$

Funktio f on integroituva, jos

$$-\infty < \int f\, d\mu < +\infty.$$

Tämän määritelmän nojalla saamme seuraavan lemman väitteet.

Lemma 3.1.4 *Olkoon* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *mitta-avaruus ja olkoot funktiot* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *ja* $g : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *mitallisia. Tällöin*

(a) *Jos* $\int f \, d\mu$ *on olemassa ja* $\alpha \in \mathbb{R}$, *niin*

$$\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu.$$

(b) *Jos* $f \geq g$ *ja* $\int g d\mu$ *on olemassa ja* $\int g d\mu > -\infty$, *niin* $\int f d\mu$ *on olemassa ja*

$$\int f \, d\mu \geq \int g \, d\mu.$$

(b') *Jos* $f \geq g$ *ja* $\int f d\mu$ *on olemassa ja* $\int f d\mu < \infty$, *niin* $\int g d\mu$ *on olemassa ja*

$$\int f \, d\mu \geq \int g \, d\mu.$$

(c) *Mikäli* $\int f d\mu$ *on olemassa, niin*

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

(d) *Olkoon* $f \geq 0$. *Tällöin*

$$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ \int_E \phi \, d\mu \mid \phi \text{ yksinkertainen ja } \phi \leq f \right\}.$$

(e) *Jos* $\int f \, d\mu$ *on olemassa, niin* $\int_E f \, d\mu$ *on olemassa jokaiselle* $E \in \mathcal{B}$.

Todistus. Kohta (a) seuraa suoraan integraalin määritelmästä ja vastaavasta yksinkertaisten funktioiden tuloksesta.

(b) Olkoot f ja g mitallisia ja $f \geq g$. Oletetaan ensin, että $f \geq g \geq 0$. Olkoon ϕ yksinkertainen siten, että $0 \leq \phi \leq g$. Tällöin siis $\phi \leq f$ ja

$$\int \phi \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

Koska ϕ on mielivaltainen, niin

$$\int g\,d\mu = \sup\left\{\int \phi\,d\mu \mid \phi \text{ yksinkertainen ja } \phi \le g\right\} \le \int f\,d\mu.$$

Oletamme seuraavaksi, että funktiot f ja g ovat mielivaltaisia. Koska $f \ge g$, niin tällöin $f^+ \ge g^+$ ja $f^- \le g^-$. Jos $\int g d\mu$ on olemassa, niin tämä tarkoittaa sitä, että

$$\int g^+\,d\mu - \int g^-\,d\mu$$

on määritelty. Siis $\int g^-\,d\mu < \infty$, jos $\int g^+\,d\mu = \infty$. Jos näin on, niin $\int f^-\,d\mu < \infty$. Siis $\int f\,d\mu$ on olemassa. Lisäksi

$$\begin{aligned} \int f\,d\mu &= \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu \\ &\ge \int g^+\,d\mu - \int g^-\,d\mu = \int g\,d\mu, \end{aligned}$$

joten kohta (b) on voimassa.

(b') Todistus menee aivan kuten kohdassa (b).

(c) Tämä seuraa suoraan kohdista (b) ja (b') huomaamalla, että

$$-|f| \le f \le |f|.$$

(d) ja (e) Suora seuraus määritelmästä. $\square$

Integraali määrittelee joukkofunktion seuraavasti:

Lause 3.1.5 *Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus ja $h:\ X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mitallinen funktio. Määrittelemme funktio $\lambda_h:\ \mathcal{B} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ siten, että*

$$\lambda_h(B) = \int_B h\,d\mu,\ \ B \in \mathcal{B},$$

mikäli $\int h\,d\mu$ on olemassa. Tällöin λ_h on täydellisesti additiivinen. Erityisesti, jos h on ei negatiivinen, niin λ_h on mitta avaruudessa $(X, \mathcal{B})$.

Todistus. Funktio λ_h on täydellisesti additiivinen, jos jokaiselle pistevieraalle joukolle $B_i \in \mathcal{B}$ on voimassa

$$\lambda_h\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_h\left(B_i\right)$$

Oletamme aluksi, että funktio h on ei-negatiivinen ja yksinkertainen, eli että h voidaan esittää muodossa

$$h = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i},$$

missä joukot E_i ovat pistevieraita ja $a_i \geq 0$. Tällöin saamme

$$\lambda_h(B) = \int_B h\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i \cap B).$$

Olkoot joukot B_i pistevieraita ja mitallisia sekä $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = B$. Tällöin mitan μ ei-negatiivisuudesta ja täydellisestä additiivisuudesta seuraa, että

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_i \cap B_j) \quad = \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_i \mu(E_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \textstyle\int_{B_j} h d\mu.$$

Siten väite pätee positiivisille yksinkertaisille funktioille.

Olkoon nyt h mielivaltainen ei-negatiivinen mitallinen funktio ja ϕ yksinkertainen siten, että $\phi \leq h$. Tällöin

$$\int_B \phi \; d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i} \phi \; d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i} h \; d\mu.$$

Näin ollen

$$\int_B h\, d\mu = \sup \left\{ \int_B \phi d\mu \mid \phi \text{ on yksinkertainen ja } \phi \leq h \right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i} h\, d\mu.$$

Siis

$$\lambda_h\,(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_h\,(B_i) \tag{3.1}$$

Jos $\int_B h\, d\mu = \infty$, niin väite on voimassa.

Oletetaan, että $0 \leq \int_B h < \infty$ ja todistetaan seuraavaksi epäyhtälö toisin päin. Koska $0 \leq \int_B h < \infty$, niin jokaisella $\epsilon > 0$ ja $n \in \mathbb{N}$ on olemassa yksinkertaiset funktiot ϕ_k, $k = 1, ..., n$, siten, että

$$\int_{B_k} h\, d\mu - \frac{\epsilon}{n} \leq \int_{B_k} \phi_k\, d\mu \tag{3.2}$$

jokaiselle $k = 1, .., n$. Merkitsemme

$$\phi'_n = \max\{\phi_1, \dots, \phi_n\},$$

jolloin ϕ'_n on yksinkertainen funktio. Tällöin epäyhtälöstä (3.2) seuraa

$$\int_{B_k} h\, d\mu \leq \int_{B_k} \phi'_n\ d\mu + \frac{\epsilon}{n} \tag{3.3}$$

kaikilla $k = 1, \dots, n$. Koska $\phi'_n \leq h$, saamme

$$\begin{aligned} \lambda_h(B) = \textstyle\int_B h\, d\mu \ &\geq \ \int_{\bigcup_{i=1}^n B_i} h\ d\mu \\ &\geq \ \int_{\bigcup_{i=1}^n B_i} \phi'_n\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} \phi'_n\ d\mu. \end{aligned}$$

Siis epäyhtälön (3.3) nojalla

$$\lambda_h(B) \geq \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{B_i} h\, d\mu - \frac{\epsilon}{n} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} h\, d\mu \right) - \epsilon$$

jokaiselle n. Koska ϵ on mielivaltainen, niin

$$\lambda_h(B) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i} h\, d\mu.$$

Siis epäyhtälön (3.1) nojalla λ_h on täydellisesti additiivinen ja väite on voimassa.

Mielivaltaiselle mitalliselle funktiolle h funktion λ_h täydellisesti additiivisuus saadaan esityksestä $h = h^+ - h^-$, jos $\int h d\mu$ on olemassa. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Seuraus 3.1.6 *Olkoon $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ kasvava jono mitallisia joukkoja ja olkoon funktio $h: X \to [0, +\infty]$ mitallinen. Tällöin*

$$\int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i} h\ d\mu = \lim_{i \to \infty} \int_{B_i} h\ d\mu.$$

Vastaavasti, jos $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ on vähenevä jono mitallisia joukkoja ja $\int_{B_i} h d\mu < \infty$ jostakin arvosta i lähtien, niin

$$\int_{\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i} h\ d\mu = \lim_{i \to \infty} \int_{B_i} h\ d\mu.$$

Todistus. Koska

$$\lambda(B) = \int_B h \, d\mu$$

on mitta, niin väite seuraa suoraan Lauseesta 2.1.5. □

Seuraavaksi pääsemmekin erääseen koko tämän kurssin keskeisimpään lauseeseen. Tämä on niin sanottu monotonisen konvergenssin lause. Tämän avulla voimme vaihtaa joissain olosuhteissa raja-arvon oton ja integroinnin järjestystä. Myöhemmin saamme myös muita vastaavanlaisia tuloksia.

Lause 3.1.7 (MONOTONISEN KONVERGENSSIN LAUSE) *Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus ja olkoon $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kasvava jono ei-negatiivisia mitallisia funktioita ja*

$$h = \lim_{i\to\infty} h_i.$$

Tällöin voimme siirtää raja-arvon integraali merkin sisälle, eli

$$\int h \, d\mu = \lim_{i\to\infty} \int h_i \, d\mu.$$

Todistus. Koska $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on kasvava jono, niin $h \geq h_i$ kaikilla i, joten Lemman 3.1.4 nojalla

$$\int h \, d\mu \geq \int h_i \, d\mu, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Koska tämä on voimassa jokaiselle indeksille i, niin saamme

$$\int h \, d\mu \geq \sup \int h_i \, d\mu = \lim_{i\to\infty} \int h_i \, d\mu.$$

Todistamme vielä epäyhtälön toiseen suuntaan. Mikäli

$$\lim_{i\to\infty} \int h_i \, d\mu = \infty,$$

niin edellisen kohdan perusteella väite on voimassa. Oletamme seuraavaksi, että

$$\lim_{i\to\infty} \int h_i \, d\mu < \infty.$$

Nyt käytämme pikku kikkaa. Olkoon $0 < b < 1$ ja olkoon ϕ yksinkertainen funktio siten, että $\phi \leq h$. Merkitsemme

$$B_i = \{x \in X \mid h_i(x) \geq b\phi(x)\}.$$

Koska yksinkertainen funktio saa vain äärellisiä arvoja, niin $b\phi \leq h = \sup h_i$ ja siis

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = X.$$

Näin ollen Lemman 3.1.4 avulla voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty} \int h_i \; d\mu \;\; &\geq \;\; \int h_i \; d\mu \geq \int_{B_i} h_n \; d\mu \\ &\geq \;\; \int_{B_i} b\phi \; d\mu = b \int_{B_i} \phi \; d\mu. \end{aligned}$$

Koska $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on kasvava jono funktioita, niin joukot B_i muodostavat kasvavan jonon mitallisia joukkoja. Näin ollen edellisen lauseen seurauksen nojalla saamme

$$\lim_{i\to\infty} \int h_i \, d\mu \geq b \int \phi d\mu.$$

Koska $0 < b < 1$ on mielivaltainen, niin

$$\lim_{i\to\infty} \int h_i \, d\mu \geq \int \phi \, d\mu.$$

Koska nyt puolestaan $\phi \leq h$ on mielivaltainen, niin

$$\lim_{i\to\infty} \int h_i \, d\mu \geq \int h \, d\mu,$$

joten väite on kokonaisuudessaan todistettu. $\square$

Tämän perusteella onnistumme nyt todistamaan integraalien yhteenlaskulle seuraavan:

Lause 3.1.8 *Olkoot f ja g mitallisia funktioita mitta-avaruudessa $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ja oletetaan, että $f + g$ on määritelty. Tällöin, jos $\int f \, d\mu$ ja $\int g \, d\mu$ ovat olemassa ja $\int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ on määritelty, niin*

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Todistus. Olemme luvun alussa todistaneet väitteen yksinkertaisille funktioille. Lähdemme laajentamaan tätä.

Oletamme ensin, että funktiot f ja g ovat positiivisia. Tällöin on olemassa kasvavat jonot (ϕ_n) ja (ψ) yksinkertaisia funktioita siten, että

$$f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n \quad \text{ja} \quad g = \sup_{n\in\mathbb{N}} \psi_n.$$

Tällöin myös $(\phi_n + \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on kasvava jono yksinkertaisia funktioita ja

$$\lim_{n\to\infty} (\phi_n + \psi_n) = f + g.$$

Monotonisen konvergenssilauseen 3.1.7 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \int (\phi_n + \psi_n)\, d\mu = \int (f+g)\, d\mu.$$

Koska väite oli siis voimassa yksinkertaisille funktioille, niin

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi_n\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n\, d\mu = \int (f+g)\, d\mu.$$

Tähän voimme soveltaa uudelleen Monotonista konvergenssilausetta, jolloin saamme

$$\int f d\mu + \int g d\mu = \int (f+g)\, d\mu.$$

Siten väite on voimassa, mikäli f ja g ovat positiivisia.

Merkitään $h = f + g$. Oletamme seuraavaksi, että $f \geq 0$, $g \leq 0$ ja $h \geq 0$. Koska $f + g$ on määritelty ja g on negatiivinen sekä $f + g \geq 0$, niin g on äärellinen. Siis ehdoista $h \geq 0$ ja $-g \geq 0$ seuraa $f = h - g \geq 0$ ja alkuosa todistuksen nojalla

$$\int f\, d\mu = \int h\, d\mu - \int g\, d\mu.$$

Jos $\int g\, d\mu$ on äärellinen, niin tällöin

$$\int f\, d\mu + \int g\, d\mu = \int h\, d\mu = \int (f+g)\, d\mu.$$

Mikäli $\int g\, d\mu = -\infty$, niin ehdosta $f + g \geq 0$ seuraa $f \geq -g \geq 0$ ja edelleen Lemman 3.1.4 nojalla

$$\int f\, d\mu \geq -\int g\, d\mu = \infty.$$

Tällöin $\int f\, d\mu + \int g\, d\mu$ ei olisi määritelty, missä on ristiriita. Siis $\int g d\mu$ on aina äärellinen ja väite on voimassa, kun $f + g \geq 0$.

Olkoot nyt $f \geq 0$, $g \leq 0$ ja $h = f + g \leq 0$. Tällöin puolestaan $-f \leq 0$, $-g \geq 0$ ja $-h \geq 0$. Tähän voimme soveltaa edellistä kohtaa, joten saamme

$$\int -h\, d\mu = \int -f\, d\mu + \int -g\, d\mu$$

eli

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Määrittelemme nyt joukot (E_i) seuraavasti:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{x \in X \mid f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0\}, \\
E_2 &= \{x \in X \mid f(x) \geq 0,\ g(x) < 0,\ h(x) \geq 0\}, \\
E_3 &= \{x \in X \mid f(x) \geq 0,\ g(x) < 0,\ h(x) < 0\}, \\
E_4 &= \{x \in X \mid f(x) < 0, g(x) \geq 0, h(x) \geq 0\}, \\
E_5 &= \{x \in X \mid f(x) < 0,\ g(x) \geq 0, h(x) < 0\}, \\
E_6 &= \{x \in X \mid f(x) < 0,\ g(x) < 0\}.
\end{aligned}$$

Tällöin edellisten kohtien mukaan kaikilla $i = 1, \ldots, 6$

$$\int_{E_i} f + g\, d\mu = \int_{E_i} f\, d\mu + \int_{E_i} g\, d\mu. \tag{3.4}$$

Toisaalta joukot E_i ovat pistevieraita, joten Lauseen 3.1.5 nojalla

$$\begin{aligned}
\int g\ d\mu &= \sum_{i=1}^{6} \int_{E_i} g\, d\mu, \\
\int f\, d\mu &= \sum_{i=1}^{6} \int_{E_i} f\, d\mu.
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}
\int g\, d\mu + \int f\, d\mu &= \sum_{i=1}^{6} \int_{E_i} g\, d\mu + \sum_{i=1}^{6} \int_{E_i} f\, d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{6} \int_{E_i} h\, d\mu = \int h\, d\mu,
\end{aligned}$$

mikäli $\int h\,d\mu$ on olemassa.

Todistetaan, että integraali $\int h\,d\mu$ on aina olemassa lauseen oletuksilla. Tehdään vastaoletus, ettei $\int h\,d\mu$ ole olemassa. Tällöin

$$\int h^+\,d\mu = \int h^-\,d\mu = \infty.$$

Siis saamme

$$\sum_{i=1}^{6} \int_{E_i} h^+\,d\mu = \int h^+\,d\mu = \infty = \int h^-\,d\mu = \sum_{i=1}^{6} \int_{E_i} h^-\,d\mu = \infty.$$

Näin ollen on olemassa indeksit i ja j siten, että

$$\int_{E_i} h^+\,d\mu = \infty \quad \text{ja} \quad \int_{E_j} h^-\,d\mu = \infty.$$

Koska yhtälön (3.4) nojalla $\int_{E_i} h d\mu$ on olemassa, niin

$$\int_{E_i} h\,d\mu = \int_{E_i} f\,d\mu + \int_{E_i} g\,d\mu = \infty,$$

eli

$$\int_{E_i} f\;d\mu = \infty \quad \text{tai} \quad \int_{E_i} g\,d\mu = \infty.$$

Aivan vastaavasti

$$\int_{E_j} f\,d\mu = -\infty \quad \text{tai} \quad \int_{E_j} g\,d\mu = -\infty. \tag{3.5}$$

Oletetaan, että $\int_{E_i} f\,d\mu = \infty$. Koska Lauseen 3.1.5 nojalla

$$\infty = \int f\,d\mu = \int_{Ei} f\,d\mu + \int_{X\setminus Ei} f\,d\mu,$$

niin

$$\infty = \int f\,d\mu = \int_{E_j} f\,d\mu + \int_{X\setminus E_j} f\,d\mu,$$

joten

$$\int_{E_j} f\,d\mu \neq -\infty.$$

Siis ehdosta (3.5) seuraa, että

$$\int_{E_j} g\,d\mu = -\infty.$$

Tällöin siis

$$\int g\,d\mu = \int_{E_j} g\,d\mu + \int_{X\setminus E_j} g\,d\mu = -\infty.$$

Koska $\int f\,d\mu = \infty$, niin $\int f\,d\mu + \int g\,d\mu$ ei ole määritelty, mikä on ristiriita. Vastaavasti ehdosta $\int_{E_i} g\,d\mu = -\infty$ päädytään ristiriitaan. Siten $\int h\,d\mu$ on olemassa ja väite on siis kokonaisuudessaan todistettu. $\square$

Tälle lauseelle saamme kolme seurausta.

Seuraus 3.1.9 **(a)** *Jos h_n on ei-negatiivinen mitallinen funktio jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, niin*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int h_i\,d\mu = \int \sum_{i=1}^{\infty} h_i\,d\mu.$$

(b) *Jos g on mitallinen ja on olemassa integroituva funktio h, jolle $|g| \le h$, niin myös g on integroituva.*

(c) *Jos h on mitallinen, niin h on integroituva, jos ja vain jos $|h|$ on integroituva.*

Todistus. (a) Soveltamalla edellistä lausetta ja Monotonista konvergenssilausetta 3.1.7 saamme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int h_i\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int h_i\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{i=1}^{n} h_i\,d\mu = \int \sum_{i=1}^{\infty} h_i\,d\mu.$$

(b) Oletamme, että $\int h\,d\mu < \infty$. Tällöin Lemman 3.1.4 nojalla

$$\int |g|\,d\mu \le \int h\,d\mu < \infty.$$

Näin ollen $|g|$ on integroituva. Koska

$$|g| = \sup(g^+, g^-) \ge g^+,$$

niin

$$\infty > \int |g|\, d\mu \geq \int g^+\, d\mu,$$

joten g^+ on integroituva. Vastaavasti myös g^- on integroituva. Siten $g = g^+ - g^-$ on integroituva, sillä

$$\int g d\mu = \int g^+\, d\mu - \int g^-\, d\mu.$$

(c) Jos $|h|$ on integroituva, niin kohdan (b) todistuksessa näimme, että myös h on integroituva. Oletamme siis, että h on integroituva, eli että

$$-\infty < \int h d\mu = \int h^+\, d\mu - \int h^-\, d\mu < \infty.$$

Siten

$$\int h^+\, d\mu < \infty \quad \text{ja} \quad \int h^-\, d\mu < \infty.$$

Koska $|h| = h^+ + h^-$, niin edellisen lauseen avulla saamme

$$\int (h^+ + h^-)\, d\mu = \int h^+\, d\mu + \int h^-\, d\mu < \infty.$$

Näin ollen $|h|$ on integroituva. $\square$

Funktio voi olla Riemann-integroituva, vaikka sen itseisarvo ei olisikaan. Tämä ei siis ole Lebesguen integraalissa mahdollista. Tämä on eräs niistä harvoista kohdista, joissa saamme Riemannin integraalille vahvemman tuloksen kuin Lebesguen integraalille.

Seuraavassa todistamme neljä hyvin ilmeistä tulosta, joille on käyttöä myöhemmin.

Lause 3.1.10 *Olkoot funktiot f, g ja h mitallisia mitta-avaruudessa $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Tällöin on voimassa seuraavat ominaisuudet:*

(a) *Jos $f = 0$ a.e., niin $\int f\, d\mu = 0$ ja siis f on integroituva.*

(b) *Jos $f = g$ a.e. ja $\int g\, d\mu$ on olemassa, niin*

$$\int f\, d\mu = \int g\, d\mu.$$

(c) *Jos h on integroituva, niin h on äärellinen melkein kaikkialla.*

(d) *Jos* $h \geq 0$ *ja* $\int h \, d\mu = 0$*, niin* $h = 0$ *a.e..*

Todistus. (a) Oletamme aluksi, että $f \geq 0$, ja että $f = 0$ melkein kaikkialla. Tällöin

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int \psi \, d\mu \mid \psi \text{ on yksinkertainen ja } \psi \leq f \right\}.$$

Yksinkertainen funktion ψ siten, että $0 \leq \psi \leq f$ voimme kirjoittaa muotoon

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i},$$

missä joukot E_i ovat pistevieraita ja arvot a_i ei-negatiivisia.

Merkitsemme

$$F = \{x \mid f(x) = 0\}.$$

Tällöin $\mu(X \setminus F) = 0$, sillä $f = 0$ melkein kaikkialla. Toisaalta μ on additiivinen, joten

$$\mu(E_i) = \mu(E_i \cap F) + \mu(E_i \setminus F).$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \int \psi \, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \mu(E_i \cap F) + a_i \mu(E_i \setminus F) \right). \end{aligned}$$

Koska $E_i \setminus F \subset X \setminus F$, niin

$$\mu(E_i \setminus F) \leq \mu(X \setminus F) = 0,$$

eli $\mu(E_i \setminus F) = 0$. Jos nyt $E_i \cap F = \emptyset$, niin myös $\mu(E_i \cap F) = 0$. Toisaalta, jos $E_i \cap F \neq \emptyset$, niin $a_i = 0$, sillä tällöin $f = 0$ ja $0 \leq \psi \leq f$. Siis joka tapauksessa

$$\int \psi \, d\mu = 0.$$

Koska lisäksi ψ on mielivaltainen, niin myös

$$\int f \, d\mu = 0.$$

Siis väite on voimassa, kun $f \geq 0$.

Oletamme seuraavaksi, että f on mielivaltainen. Koska $f = 0$ melkein kaikkialla, niin myös $|f| = 0$ melkein kaikkialla. Siis edellisen kohdan perusteella

$$\int |f| \, d\mu = 0.$$

Mutta koska $f^- \leq |f|$ ja $f^+ \leq |f|$, niin

$$\int f^- \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu = 0 \text{ ja } \int f^+ \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu = 0.$$

Siis $\int f^- \, d\mu = 0$ ja $\int f^+ \, d\mu = 0$, joten

$$\int f d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = 0.$$

(b) Olkoon $f = g$ melkein kaikkialla ja olkoon $\int g d\mu$ olemassa. Merkitsemme

$$E = \{ \, x \mid \quad f(x) = g(x) \}.$$

Koska $f = g$ melkein kaikkialla, niin $\mu(X \setminus E) = 0$. Lisäksi kirjoitamme

$$g = g\chi_E + g\chi_{X \setminus E}.$$

Tällöin kohdan (a) nojalla

$$\begin{aligned} \int g d\mu &= \int g\chi_E \, d\mu + \int g\chi_{X \setminus E} \, d\mu \\ &= \int g\chi_E \, d\mu, \end{aligned}$$

sillä $\mu(X \setminus E) = 0$. Teemme tämän saman funktiolle f ja muistamme, että $f = g$ joukossa E. Tällöin saamme

$$\textstyle\int g d\mu \quad = \quad \int g\chi_E \, d\mu = \int f\chi_E \, d\mu = \int f\chi_E \, d\mu + \int f\chi_{X \setminus E} \, d\mu.$$

Lauseen 3.1.8 nojalla

$$\int f d\mu = \int f\chi_E \, d\mu + \int f\chi_{X \setminus E} \, d\mu = \int g d\mu.$$

(c) Olkoon h integroituva, eli

$$-\infty < \int h d\mu < \infty.$$

Olkoon jälleen ensiksi $h \geq 0$. Merkitsemme

$$E = \{x \mid \ h(x) = \infty\}$$

Tällöin $h \geq n\chi_E$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $n\chi_E$ on yksinkertainen. Siten

$$\infty > \int h d\mu \geq \int n\chi_E \, d\mu = n\mu(E)$$

kaikkilla arvoilla n. Siis välttämättä $\mu(E) = 0$, eli h on äärellinen melkein kaikkialla, kun $h \geq 0$.

Olkoon seuraavaksi h mielivaltainen ja integroituva. Koska tällöin

$$-\infty < \int h d\mu < \infty,$$

niin myös

$$0 \leq \int h^+ \, d\mu < \infty \text{ ja } 0 \leq \int h^- \, d\mu < \infty.$$

Siis h^+ ja h^- ovat edellisen perusteella melkein kaikkialla äärellisiä, joten myös $h = h^+ - h^-$ on melkein kaikkialla äärellinen.

(d) Olkoon $h \geq 0$ ja $\int h d\mu = 0$. Merkitsemme

$$E = \{x \mid \ h(x) > 0\}.$$

Tällöin

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n,$$

missä

$$E_n = \{x \mid \ h(x) > \frac{1}{n}\}.$$

Koska

$$0 = \int h d\mu \geq \int_{E_n} h \geq \frac{1}{n}\mu\left(E_n\right) \geq 0,$$

niin $\mu(E_n) = 0$ kaikilla n. Siis

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = 0,$$

joten väite on todistettu. $\square$

3.2 Muita konvergenssilauseita

Edellisen kappaleen Monotonisen konvergenssilauseen lisäksi pätee yleisempiäkin konvergenssilauseita, joita käsittelemme tässä kappaleessa.

Lause 3.2.1 (YLEINEN MONOTONISEN KONVERGENSSIN LAUSE) *Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Tällöin*

(a) *Jos $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on kasvava jono mitallisia funktioita ja on olemassa mitallinen funktio h siten, että $g_n \geq h$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\int h d\mu > -\infty$, niin*

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu.$$

(b) *Jos $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on vähenevä jono mitallisia funktioita ja on olemassa mitallinen funktio h siten, että $g_n \leq h$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\int h d\mu < \infty$, niin*

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu.$$

Todistus. Emme todista tästä muuta kuin kohdan (a), sillä kohdan (b) todistus ei eroa tästä millään oleellisella tavalla.

Merkitsemme

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g.$$

Lemman 3.1.4 nojalla $\int g d\mu$ on olemassa. Koska (g_n) on kasvava jono, niin $g_n \leq g$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siten

$$\int g_n \, d\mu \leq \int g d\mu$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis myös

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu \leq \int g d\mu.$$

Jos

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \infty,$$

niin väite on voimassa. Jos $\int h d\mu = \infty$, niin

$$\infty = \int g_n \, d\mu \geq \int h \, d\mu = \infty$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten väite on tällöin voimassa.

Oletamme seuraavaksi, että h on integroituva, eli että

$$-\infty < \int h \, d\mu < \infty.$$

Tällöin Lauseen 3.1.10 (a) nojalla h on äärellinen melkein kaikkialla. Merkitsemme

$$A = \{x \mid \; h(x) \neq \pm\infty\}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \int g_n \, d\mu &= \int_A g_n \, d\mu + \int_{X \setminus A} g_n \, d\mu \\ &= \int_A g_n \, d\mu \\ &= \int g_n \chi_A \, d\mu. \end{aligned}$$

Vastaavasti saamme

$$\int h \, d\mu = \int h \chi_A \; d\mu.$$

Koska $g_n \chi_A - h \chi_A \geq 0$, niin Monotonisen konvergenssilauseen 3.1.7 avulla voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \left(\int g_n \; d\mu - \int h \, d\mu \right) &= \lim_{n \to \infty} \int (g_n \chi_A - h \chi_A) \; d\mu \\ &= \int (g - h) \chi_A \, d\mu \\ &= \int g \, \chi_A d\mu - \int h \, \chi_A d\mu. \\ &= \int g \, d\mu - \int h \, d\mu. \end{aligned}$$

Siis

$$\lim_{n \to \infty} \int g_n \, d\mu = \int g d\mu.$$

ja olemme todistaneet väitteen osan (a). Kohta (b) menee aivan vastaavasti.
□