kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten väite on tällöin voimassa.

Oletamme seuraavaksi, että h on integroituva, eli että

$$-\infty < \int h \, d\mu < \infty.$$

Tällöin Lauseen 3.1.10 (a) nojalla h on äärellinen melkein kaikkialla. Merkitsemme

$$A = \{x \mid \quad h(x) \neq \pm\infty\}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \int g_n \, d\mu &= \int_A g_n \, d\mu + \int_{X \setminus A} g_n \, d\mu \\ &= \int_A g_n \, d\mu \\ &= \int g_n \chi_A \, d\mu. \end{aligned}$$

Vastaavasti saamme

$$\int h \, d\mu = \int h\chi_A \; d\mu.$$

Koska $g_n\chi_A - h\chi_A \geq 0$, niin Monotonisen konvergenssilauseen 3.1.7 avulla voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\int g_n \; d\mu - \int h \, d\mu \right) &= \lim_{n\to\infty} \int (g_n\chi_A - h\chi_A) \; d\mu \\ &= \int (g-h)\chi_A \, d\mu \\ &= \int g \, \chi_A d\mu - \int h \, \chi_A d\mu. \\ &= \int g \, d\mu - \int h \, d\mu. \end{aligned}$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \int g d\mu.$$

ja olemme todistaneet väitteen osan (a). Kohta (b) menee aivan vastaavasti.
□

Lemma 3.2.2 (FATOUN LEMMA) *Olkoot funktiot* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mitallisia mitta-avaruudessa* $(X, \mathcal{B}, \mu)$*. Tällöin:*

(a) *Jos* $f_n \geq f$ *jokaisella* $n \in \mathbb{N}$ *ja* $\int f d\mu$ *on olemassa sekä* $\int f d\mu > -\infty$, *niin*

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

(b) *Jos* $f_n \leq f$ *jokaisella* $n \in \mathbb{N}$ *ja* $\int f d\mu$ *on olemassa sekä* $\int f d\mu < \infty$, *niin*

$$\limsup_{n\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Todistus. (a) Merkitsemme

$$g_n = \inf_{k\geq n} f_k.$$

Tällöin jono $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on kasvava ja $g_n \geq f$ ja $\int f d\mu > -\infty$. Näin ollen voimme soveltaa Lausetta 3.2.1 ja saamme

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu.$$

Koska $f_k \geq g_n$ kaikilla $k \geq n$, niin

$$\int f_k \, d\mu \geq \int g_n \, d\mu$$

kaikilla $k \geq n$. Tällöin siis

$$\inf_{k\geq n} \int f_k \geq \int g_n \, d\mu$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \textstyle\int f_n \, d\mu &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} \int f_k \, d\mu \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu \\
&= \textstyle\int \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu \\
&= \textstyle\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu.
\end{aligned}$$

Siis (a) pätee.

(b) Sovellamme vain (a)-kohtaa funktioihin $-f_n$ ja $-f$ ja muistamme, että

$$\sup f = -\inf(-f)$$

jolloin väite seuraa suoraan kohdasta (a). $\square$

Edellisessä Fatoun lemmassa voi olla voimassa myös aito epäyhtälö. Tällaisen funktiojonon keksiminen on itseasiassa hyvinkin helppoa. Esimerkiksi funktioille $f_n = \chi_{]n,\infty[}$ on Fatoun lemmassa aito epäyhtälö.

Seuraava lause on jälleen yksi tämän kurssin keskeisimmistä lauseista yhdessä monotonisen konvergenssilauseen kanssa. Kyseessä on Lebesguen konvergenssi lause.

Lause 3.2.3 (LEBESGUEN KONVERGENSSI LAUSE) *Olkoon* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jono mitallisia funktioita mitta-avaruudessa* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *ja* f *mitallinen funktio siten, että*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad a.e..$$

Tällöin, jos on olemassa integroituva funktio g *siten, että* $|f_n| \le g$ *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$, *niin*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Todistus. Oletuksen mukaan

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad \text{a.e.},$$

joten

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n = f \qquad \text{a.e..}$$

Koska $|f_n| \le g$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin myös $|f| \le g$ melkein kaikkialla. Näin ollen Lauseiden 3.1.9 ja 3.2.1 perusteella f on integroituva. Tallöin Lauseen 3.1.10 ja Fatoun lemman 3.2.2 perusteella

$$\begin{aligned}\int f d\mu = \int \liminf\nolimits_{n\to\infty} f_n \, d\mu \ &\le\ \liminf\nolimits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \le \limsup\nolimits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \\ &\le\ \int \limsup\nolimits_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int f d\mu,\end{aligned}$$

mistä seuraa väite. $\square$

Lebesguen konvergenssi lauseessa on huomattava, että funktion g integroituvuus on oleellinen vaatimus. Voimme löytää funktioita, joille muut ehdot ovat voimassa, mutta väite ei pidä paikkaansa (harjoitustehtävä).

3.3 Riemannin integraali ja Lebesguen integraali

Tähän mennessä olemme saaneet hyvin vahvoja tuloksia Lebesguen integraalille. Etenkin konvergenssilauseet ovat huomattavasti vahvempia kuin Riemannin integraalin tapauksessa. Mutta on yksi ongelma. Emme osaa laskea integraalin arvoa kuin korkeintaan yksinkertaisten funktioiden tapauksessa.

Jotta voisimme saada integraalien arvoja lasketuksi, vertailemme Riemannin ja Lebesguen integraaleja. Tällöin pyrimme löytämään yhteyden näiden välillä niin, että kun joudumme laskemaan Riemannin integraalin arvon jossain hankalassa esimerkiksi funktiojonojen tapauksessa, siirrymme ensin Lebesguen integraaliin, käytämme konvergenssilauseita ja siirrymme takaisin Riemannin integraaliin. Ongelma onkin nyt, milloin Riemannin ja Lebesguen integraalit ovat yhtäsuuret.

Palautamme ensiksi mieleen, mihin Riemannin integraali perustuu. Olkoon $[a, b]$ suljettu väli, $a < b$, ja olkoon funktio $f : \ [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Jaamme välin $[a, b]$ osaväleiksi. Joukkoa $P = \{x_0, ..., x_n\}$ sanomme välin $[a, b]$ jaoksi, jos $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_{i-1} < x_i$ jokaiselle $i = 1, .., n$. Määrittelemme reaaliluvut M_i ja m_i seuraavasti:

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(y) \mid x_{i-1} < y \leq x_i\}, \\ m_i &= \inf\{f(y) \mid x_{i-1} < y \leq x_i\}. \end{aligned}$$

Näiden avulla puolestaan jakoa P vastaavan yläsumman $U(P)$ ja alasumman $L(P)$ määrittelemme seuraavasti:

$$\begin{aligned} U(P) &= \textstyle\sum_{i=1}^n M_i\,(x_i - x_{i-1}), \\ L(P) &= \textstyle\sum_{i=1}^n m_i\,(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Edelleen asetamme

$$|P| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

Jakoa P vastaavat porrasfunktiot α_P ja β_P ovat

$$\begin{aligned} \alpha_P(x) &= \sum_{i=1}^n M_i \chi_{]x_{i-1}, x_i]}(x) = M_i, \text{ kun } x \in]x_{i-1}, x_i], \\ \beta_P(x) &= \sum_{i=1}^n m_i \chi_{]x_{i-1}, x_i]}(x) = m_i, \text{ kun } \ x \in]x_{i-1}, x_i]. \end{aligned}$$

Porrasfunktiot ovat yksinkertaisia funktioita, joten

$$U(P) = \int_{[a,b]} \alpha_P \, dm$$

ja

$$L(P) = \int_{[a,b]} \beta_P \, dm,$$

missä m on Lebesguen mitta.

Funktio f on Riemann-integroituva, kun

$$\sup_P L(P) = \inf_P U(P) = \int_a^b f \, dx.$$

Lemma 3.3.1 *Rajoitettu funktio f on Riemann-integroituva, jos ja vain jos on olemassa jaot $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ siten, että*

$$\lim_{k \to \infty} |P_k| = 0,$$

ja jakoja vastaavat porrasfunktiot α_k ja β_k toteuttavat seuraavat ehdot:

(1) $\alpha_k \geq f \geq \beta_k$.

(2) *Jono $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on kasvava.*

(3) *Jono $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on vähenevä.*

(4) *Porrasfunktioiden Lebesgue-integraalien raja-arvot ovat yhtäsuuret:*

$$\lim_{k \to \infty} \int_{[a,b]} \alpha_k \, dm = \lim_{k \to \infty} \int_{[a,b]} \beta_k \, dm.$$

Todistus. Olkoon ensiksi f Riemann-integroituva ja $c = \int_a^b f \, dx$. Tällöin on olemassa jaot P_{1n} ja P_{2n}, jotka toteuttavat ehdot $|P_{1n}| \to 0$, $|P_{2n}| \to 0$ ja

$$\begin{aligned}
c &= \inf_n U(P_{1n}) = \sup_n L(P_{2n}), \\
c - \tfrac{1}{n} &< L(P_{2n}), \\
U(P_{1n}) &< c + \tfrac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Voimme tarvitaessa jakoja tihentämällä olettaa, että $P_{1n} \subset P_{1(n+1)}$ ja $P_{2n} \subset P_{2(n+1)}$. Olkoon

$$P_n = P_{1n} \cup P_{2n},$$

eli jako, joka sisältää molenpien jakojen P_{1n} sekä P_{2n} jakopisteet. Tällöin

$$U(P_n) \leq U(P_{1n}) \leq \alpha + \frac{1}{n}$$

ja

$$L(P_n) \geq L(P_{2n}) \geq \alpha - \frac{1}{n},$$

sillä yläsummat laskevat jakoa tihennettäessä ja vastaavasti alasummat kasvavat. Olkoon α_k ja β_k jakoa P_k vastaavat porrasfunktiot. Tällöin siis

$$\beta_k \leq f \leq \alpha_k,$$

ja

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \alpha_k dm = \lim_{k\to\infty} U(P_k) = \lim_{k\to\infty} L(P_k) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \beta_k dm.$$

Lisäksi porrasfunktiojono $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on kasvava ja porrasfunktiojono $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on vähenevä, sillä jaot tihenevät. Näin ollen siis ehdot (1)–(4) ovat voimassa.

Olkoot seuraavaksi ehdot (1)–(4) voimassa ja oletetaan, että jaot P_k, $k \in \mathbb{N}$ toteuttavat ehdot (1)–(4). Olkoon lisäksi P mielivaltainen välin $[a,b]$ jako. Tällöin saamme

$$U(P) \geq U(P \cup P_k) \geq L(P \cup P_k) \geq L(P)$$

ja

$$U(P_k) \geq U(P \cup P_k) \geq L(P \cup P_k) \geq L(P_k).$$

Siis ehdon (4) nojalla

$$\inf_P U(P) = \sup_P L(P).$$

Näin ollen funktio f on Riemann-integroituva. $\square$

Lause 3.3.2 *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu reaaliarvoinen funktio ja $a < b$. Tällöin*

(a) *f on Riemann-integroituva, jos ja vain jos f on melkein kaikkialla jatkuva.*

(b) *Jos f on Riemann-integroituva, niin f on Lebesgue-integroituva ja*

$$\int_{[a,b]} f\,dm = \int_a^b f\,dx.$$

Todistus. (a) Olkoon funktio $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integroituva. Tällöin on olemassa jaot (P_k), jotka toteuttavat ehdon $|P_k| \to 0$ ja joita vastaavat porrasfunktiot toteuttavat Lemman 3.3.1 ehdot (1)–(4). Merkitsemme

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \alpha_k \quad \text{ja} \quad \beta = \lim_{k\to\infty} \beta_k.$$

Nämä ovat olemassa, sillä (α_k) on laskeva jono ja (β_k) on kasvava jono porrasfunktioita. Tällöin Monotonisen konvergenssilauseen 3.1.7 nojalla saamme

$$\lim_{k\to\infty} U(P_k) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \alpha_k dm = \int\limits_{[a,b]} \lim_{k\to\infty} \alpha_k dm = \int\limits_{[a,b]} \alpha dm.$$

Vastaavasti pätee

$$\lim_{k\to\infty} L(P_k) = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \beta_k dm = \int_{[a,b]} \beta dm.$$

Koska f on Riemann-integroituva, niin

$$\int_{[a,b]} \alpha\,dm = \int_{[a,b]} \beta\,dm = \int_a^b f\,dx.$$

Siis ehdosta $\alpha \geq \beta$ seuraa

$$\int_{[a,b]} (\alpha - \beta)\,dm = 0$$

ja edelleen $\alpha = \beta$ melkein kaikkialla. Koska Lemman 3.3.1 perusteella $\alpha \geq f \geq \beta$, niin

$$\alpha = \beta = f \quad \text{melkein kaikkialla.} \tag{3.6}$$

Osoitamme, että f on jatkuva joukossa

$$A = \{t \mid \alpha(t) = \beta(t)\} \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k \right).$$

Olkoon $x \in A$. Tällöin

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_k(x) = \lim_{k \to \infty} \beta_k(x) = f(x).$$

Tällöin on siis olemassa luonnollinen luku n_ϵ siten, että

$$|f(x) - \alpha_k(x)| < \varepsilon$$

ja

$$|f(x) - \beta_k(x)| < \varepsilon$$

kaikilla $k \geq n_\epsilon$. Olkoon $k \geq n_\epsilon$. Valitsemme

$$\delta = \frac{\min(x_i - x, x - x_{i-1})}{2},$$

missä piste x kuuluu jaon P_k jakovälille $]x_{i-1}, x_i[$. Olkoon $|x - y| < \delta$. Tällöin

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - \alpha_k(x)| + |\alpha_k(x) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - \alpha_k(x)| + |\alpha_k(x) - \alpha_k(y)| + |\alpha_k(y) - f(y)| \end{aligned}$$

Ehdosta $|x - y| < \delta$ seuraa, että pisteet x ja y kuuluvat samalle jakovälille, joten edellisen epäyhtälön oikean puolen keskimmäinen termi on nolla ja

$$\beta_k(x) = \beta_k(y) \leq f(y) \leq \alpha_k(y) = \alpha_k(x).$$

Siis saamme

$$\alpha_k(y) - f(y) \leq \alpha_k(x) - \beta_k(x) \leq \alpha_k(x) - f(x) + f(x) - \beta_k(x) \leq 2\epsilon.$$

Näin ollen

$$|f(x) - f(y)| \leq 3\epsilon \quad , \text{kun } |x - y| < \delta.$$

Siis f on jatkuva pisteessä $x \in A$, eli f on melkein kaikkialla jatkuva.

Oletamme seuraavaksi, että f on melkein kaikkialla jatkuva. Olkoon

$$A = \{x \mid f(x) \text{ on jatkuva pisteessä } x\}.$$

Koska f on melkein kaikkialla jatkuva, niin

$$m\left([a,b] \setminus A\right) = 0.$$

Olkoon nyt $x \in A$. Tällöin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{kun } |x-y| < \delta.$$

Tällöin kun jako P_k on niin pieni, että $|P_k| < \delta$, niin jakoa P_k vastaaville porrasfunktioille pätee

$$\alpha_k(x) - f(x) \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{ja} \quad f(x) - \beta_k(x) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

ja

$$\alpha_k(x) - \beta_k(x) < \varepsilon.$$

Siis

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k(x) = \lim_{k\to\infty} \beta_k(x) = f(x).$$

Koska α_k ja β_k ovat mitallisia, niin f on mitallinen. Koska f on välillä $[a,b]$ rajoitettu, niin f on Lebesgue-integroituva. Tällöin Lebesguen konvergenssilauseen 3.2.3 nojalla

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \beta_k \, dm &= \int_{[a,b]} \beta \, dm = \int_{[a,b]} f \, dm \\
&= \int_{[a,b]} \alpha \, dm = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \alpha_k \, dm.
\end{aligned}$$

Siis Lemman 3.3.1 nojalla f on Riemann-integroituva.

(b) Olkoon f Riemann-integroituva. Koska tuloksen 3.11 nojalla

$$f = \alpha = \lim \alpha_k = \lim \beta_k \quad \text{a.e.}$$

ja $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ on täydellinen, niin f on mitallinen.Tällöin Lebesguen konvergenssilauseen 3.2.3 nojalla

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \alpha_k dm = \int_{[a,b]} \alpha dm = \int_{[a,b]} f dm,$$

missä viimeinen vaihe seuraa siitä, että $f = \alpha$ melkein kaikkialla. $\square$

Kohta (b) ei välttämättä päde epäoleellisille integraaleille.

On olemassa Lebesgue-integroituvia funktiota, jotka eivät ole Riemann-integroituvia. Esimerkiksi määritellään funktio $f : [0,1 \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Tällöin $U(P) = 1$ ja $L(P) = 0$. Siis f ei ole Riemann-integroituva, kuitenkin f on yksinkertaisena funktioina Lebesgue-integroituva, sillä joukko $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ on mitallinen ja

$$f = \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}.$$

Lause 3.3.3 *Olkoon $f \geq 0$ ja $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ siten, että $a < b$. Jos epäoleellinen Riemann-integraali*

$$\int_a^b f\,dx$$

on olemassa, niin $\int_{]a,b[} f\,dm$ on olemassa ja

$$\int_{]a,b[} f\,dm = \int_a^b f\,dx.$$

Todistus. Koska Riemann-integraali

$$\int_a^b f\,dx$$

on olemassa, niin on olemassa kasvava jono (b_n) ja laskeva jono (a_n) reaalilukuja siten, että $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ sekä

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

Mutta tällöin voimme soveltaa edellistä lausetta, jolloin saamme

$$\int_{a_n}^{b_n} f\,dx = \int_{[a_n,b_n]} f\,dm.$$

Koska $f\chi_{[a_n,b_n]}$, $n \in \mathbb{N}$ on kasvava jono positiivisia funktioita, niin Monotonisen konvergenssilauseen 3.1.7 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \int f\chi_{[a_n,b_n]}dm = \int_{]a,b[} fdm.$$

Siten saamme

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} fdx = \int_{]a,b[} fdm$$

ja väite on siten todistettu. $\square$

Funktion f ei-negatiivisuus on oleellista edellisessä tuloksessa. Mielivaltaiselle reaaliarvoiselle funktiolle pätee seuraava tulos.

Lause 3.3.4 *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integroituva ja $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Jos epäoleellinen Riemann-integraali*

$$\int_a^b f\,dx$$

olemassa, niin

$$\int_a^b f\,dx = \int_{]a,b[} f\,dm.$$

Todistus. Koska

$$\int_a^b f\,dx$$

on olemassa, niin on olemassa kasvava jono (b_n) ja laskeva jono (a_n) reaalilukuja siten, että $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ sekä

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

Lauseen 3.3.2 perusteella siis

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{]a_n,b_n[} f\,dm.$$

Koska

$$|f\chi_{]a_n,b_n[}| \leq |f|$$

ja koska $|f|$ on Lebesgue-intergoituva ($|f|$ on Lebesgue-integroituva, jos ja vain jos f on Lebesgue-integroituva, Seuraus 3.1.9), niin Lebesguen konvergenssilauseen 3.2.3 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]a_n,b_n[} f\,dm = \int_{]a,b[} f\,dm,$$

joten tästä seuraa väite. $\square$

Näissä edellisessä lauseessa voi integroimisväli olla tietysti mikä tahaansa epäolleellisen integroinnin väli. Oleellista ei ole myöskään, onko f määritelty välin päätepisteissä, koska niiden mitta on nolla.

Nyt voimmekin katsoa paria esimerkkiä.

Esimerkki 3.3.5 *Olkoon*

$$f_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{x}}$$

ja olkoon integroimisväli $]0,1]$*. Näemme heti, että tällä välillä*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

ja

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Lisäksi pätee

$$\lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2 < \infty.$$

Siis $\frac{1}{\sqrt{x}}$ *on Lebesgue-integroituva ja*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}}dm.$$

Siten Lebesguen konvergenssilauseen 3.2.3 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{x}}dx = 0$$

Esimerkki 3.3.6 *Laskemme, mitä on*

$$\lim_{x\to 0+}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$$

Olkoon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jono ei-negatiivisia reaalilukuja* x_n, *joille pätee* $x_n \to 0$ *kun* $n\to\infty$. *Mikäli raja-arvo on olemassa, niin arvo*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}dt$$

ei riipu jonosta (x_n). *Ensiksi huomaamme, että*

$$\frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}\leq\frac{1}{1+t^2}$$

ja

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2}.$$

Koska

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2},$$

niin lauseen 3.3.3 nojalla $\frac{1}{1+t^2}$ *on Lebesgue-integroituva ja*

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt=\int_{[0,\infty[}\frac{1}{1+t^2}dm.$$

Tällöin Lebesguen konvergenssilauseen 3.2.3 nojalla

$$\lim_{x\to 0+}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}dt=\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}.$$

3.4 Integraalin muita ominaisuuksia

Tässä kappaleessa tarkastelemme aivan aluksi muuttujan vaihtoa Lebesguen integraalissa. Vaikka seuraava lause näyttääkin hieman mutkikkaalta, niin kyseessä on tavallinen muuttujan vaihto, tosin hiukan normaalia yleisemmin kirjoitettuna.

Lause 3.4.1 *Olkoon* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *mitta-avaruus. Olkoon* $\mathcal{B}_0$ σ*-algebra joukossa* X_0*. Oletamme, että kuvauksessa*

$$T: \; X \to X_0$$

jokaisen mitallisen joukon $A \in \mathcal{B}_0$ *alkukuva* $T^{-1}(A)$ *on mitallinen (tällöin kyseessä on yleinen mitallinen funktio). Määrittelemme mitan* $\mu_0 = \mu \circ T^{-1}$ *joukossa* $\mathcal{B}_0$ *asettamalla kaikille* $A \in \mathcal{B}_0$

$$\mu_0(A) = \mu(T^{-1}(A)).$$

Jos f *on mitallinen mitta-avaruudessa* $(X_0, \mathcal{B}_0, \mu_0)$*, niin*

$$\int_A f \, d\mu_0 = \int_{T^{-1}(A)} f \circ T \, d\mu$$

siinä mielessä, että jos jompi kumpi integraaleista on olemassa, niin molemmat integraalit ovat olemassa ja ne ovat yhtä suuret.

Todistus. Yhdistetty kuvaus $f \circ T$ on mitallinen oletuksen ja määritelmän nojalla. Oletamme aluksi, että $f = \chi_B$, missä B on mitallinen. Tällöin

$$\int\limits_{T^{-1}(A)} f(T(\omega)) \; d\mu = \int\limits_{T^{-1}(A)} \chi_{T^{-1}(B)}(\omega) \;\; d\mu = \mu(T^{-1}(A) \cap T^{-1}(B)).$$

ja toisaalta

$$\begin{aligned} \int_A f(\omega) \; d\mu_0 &= \int_A \chi_B(\omega) \;\; d\mu_0 = \mu_0(A \cap B) \\ &= \mu(T^{-1}(A \cap B)) = \mu(T^{-1}(A) \cap T^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Siis väite pätee, kun $f = \chi_B$.

Olkoon seuraavaksi f ei-negatiivinen ja yksinkertainen, eli

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{B_i},$$

missä siis joukot B_i ovat pistevieraista mitallisia ja $\alpha_i \geq 0$ kaikilla i. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_A f(\omega)\, d\mu_0 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_0(A\cap B_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(T^{-1}(A\cap B_i))\\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{T^{-1}(A)} \chi_{B_i}(T(\omega))\, d\mu = \int_{T^{-1}(A)} \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{B_i}(T(\omega))\, d\mu\\ &= \int_{T^{-1}(A)} f(T(\omega))\, d\mu.\end{aligned}$$

Tästä saamme yleistyksen mielivaltaisille ei-negatiivisille funktioille f valitsemalla jonon yksinkertaisia funktioita (ϕ_n) siten, että $f = \lim \phi_n$ ja soveltamalla Monotonista konvergenssilausetta 3.1.7 . Mielivaltaiselle funktiolle väite seuraa tästä edelleen soveltamalla saatuja tuloksia funktioihin f^+ ja f^-. $\square$

Tärkeän erikoistapauksen edellisestä lauseesta saamme , kun $X_0 = \mathbb{R}$ ja $\mathcal{B}_0$ on Borelin joukot ja $g : X \to \mathbb{R}$ on mitallinen avaruudessa $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Tällöin $g : X \to \mathbb{R}$ on myös edellisen lauseen yleistetty mitallinen funktio eli $g^{-1}(U)$ on mitallinen jokaiselle joukon $\mathbb{R}$ Borelin joukolle U (harjoitustehtävä). Edellisen lauseen nojalla jokaiselle Borel mitalliselle funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee

$$\int_A f\, d\mu_0 = \int_{g^{-1}(A)} f(g(x))\, d\mu,$$

missä $\mu_0 = \mu \circ g^{-1}$.

Lause 3.4.2 *Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus ja E metrinen avaruus sekä toteuttakoon funktio*

$$f :\ X \times E \to \mathbb{R}$$

seuraavat ehdot:

(1) *Kuvaus $\omega \to f(x, \omega)$ on jatkuva kaikilla $x \in X$.*

(2) *Kuvaus $x \to f(x, \omega)$ on μ-integroituva kaikilla $\omega \in E$.*

(3) *On olemassa integroituva funktio h siten, että*

$$|f(x, \omega)| \le h(x) \quad \textit{jokaiselle } x \in X \textit{ ja } \omega \in E.$$