Tällöin funktio

$$\varphi(\omega) = \int f(x, \omega)\, d\mu$$

on jatkuva.

Todistus. Valitsemme funktiojonon $f_n(x)$ siten, että

$$f_n(x) = f(x, \omega_n),$$

missä $\omega_n \to \omega$, kun $n \to \infty$. Tällöin

$$|f_n(x)| \leq h(x)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siten Lebesguen rajoitetun konvergenssilauseen 3.2.3 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f d\mu.$$

Koska f on jatkuva, niin

$$\lim_{n\to\infty} f(x, \omega_n) = f(x, \omega),$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x, \omega_n)\, d\mu = \int f(x, \omega)\, d\mu$$

eli φ on jatkuva, sillä yhtälön vasemman puoleinen raja-arvo ei riipu jonon (ω_n) valinnasta. $\square$

Derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihtoa koskee seuraava tulos.

Lause 3.4.3 *Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus ja $I \subset \mathbb{R}$ suljettu epätyhjä väli. Oletamme, että kuvaus*

$$f: \; I \times X \to \mathbb{R}$$

toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) *Kuvaus $x \to f(\omega, x)$ on μ-integroituva jokaiselle $\omega \in I$.*

(2) *Kuvaus $\omega \to f(\omega, x)$ on derivoituva jokaiselle $x \in X$.*

(3) *On olemassa μ-integroituva funktio h siten, että $|f'(\omega, x)| \leq h(x)$ jokaiselle $x \in X$ ja $\omega \in I$.*

Tällöin joukossa I määritellylle funktiolle φ

$$\varphi(\omega) = \int f(\omega, x)\ d\mu$$

pätee

$$\varphi'(\omega) = \int f'(\omega, x)\ d\mu.$$

Todistus. Olkoon $\omega \in I$ ja olkoot $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono välin I pisteitä siten, että $\omega_n \neq \omega$ kaikilla n ja

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = \omega.$$

Määrittelemme funktion $g_n :\ X \to \mathbb{R}$ siten, että

$$g_n(x) = \frac{f(\omega_n, x) - f(\omega, x)}{\omega_n - \omega}.$$

Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} g_n = f'(\omega, x),$$

sillä $f(\omega, x)$ on derivoituva kaikilla arvoilla $x \in X$.

Väliarvolauseen nojalla jokaiselle $x \in X$ on olemassa $\xi \in I$, jolle pätee

$$|g_n(x)| = \left|\frac{f(\omega_n, x) - f(\omega, x)}{\omega_n - \omega}\right| = |f'(\xi_n, x)| \leq h(x).$$

Näin ollen voimme soveltaa Lebesguen konvergenssi lausetta 3.2.3:

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n\ d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n\ d\mu = \int f'(\omega, x)\ d\mu.$$

Toisaalta, koska $x \to f\,(\omega_n, x)$ on integroituva jokaiselle $\omega \in I$, niin

$$\begin{aligned} \int g_n(x)\ d\mu &= \int \frac{f(\omega_n, x) - f(\omega, x)}{\omega_n - \omega}\ d\mu = \frac{\int f(\omega_n, x)\, d\mu - \int f(\omega, x)\, d\mu}{\omega_n - \omega} \\ &= \frac{\varphi(\omega_n) - \varphi(\omega)}{\omega_n - \omega}. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\omega_n) - \varphi(\omega)}{\omega_n - \omega} = \int f'(\omega, x)\, d\mu.$$

Siis väite on voimassa. $\square$

3.5 Radon-Nikodym lause ja jakolauseita

Tarkastelemme, miten mittoja voidaan vertailla keskenään.

Määritelmä 3.5.1 *Olkoot $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ja $(X, \mathcal{B}, \mu_0)$ mitta-avaruuksia. Mitta μ_0 on μ-jatkuva , jos*

$$\mu(E) = 0 \;\Rightarrow \mu_0(E) = 0.$$

Esimerkkinä tällaisesta mitan jatkuvuudesta on Lauseessa 3.1.5 määritelty mitta λ. Nimittäin olkoon m Lebesguen mitta. Tällöin

$$\lambda(A) = \int_A f dm$$

on Lauseen 3.1.5 nojalla mitta, kun $f \geq 0$ ja f on integroituva. Jos $m(E) = 0$, niin Lauseen 3.1.10 nojalla

$$\lambda(E) = \int_E f dm = 0.$$

Siis mitta λ on m-jatkuva.

Huomautamme, että mitan μ-jatkuvuus on sama käsite kuin eräissä lähteissä määritelty mitan μ-absoluuttisesti jatkuvuus. Käytämme kuitenkin käsitettä μ-jatkuvuus, sillä seuraavan tuloksen nojalla mitan jatkuvuus toisen mitan suhteen on eräänlaista jatkuvuutta.

Lause 3.5.2 *Olkoon $(X, \mathcal{B}, \nu)$ äärellinen mitta-avaruus eli $\nu(X) < \infty$. Tällöin ν on μ-jatkuva, jos ja vain jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että*

$$\mu(A) < \delta \;\Rightarrow\; \nu(A) \leq \epsilon \tag{3.7}$$

kaikilla $A \in \mathcal{B}$.

Todistus. Oletetaan, että ehto (3.7) on voimassa. Olkoon $A \in \mathcal{B}$ siten, että $\mu(A) = 0$. Tällöin jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa δ_n siten, että

$$\mu(E) < \delta_n \;\Rightarrow\; \nu(E) \leq \frac{1}{n}$$

kaikilla $E \in \mathcal{B}$. Siis kun valitsemme $E = A$, niin saamme

$$\nu(A) \leq \frac{1}{n}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten $\nu(A) = 0$, eli ν on μ-jatkuva.

Oletetaan seuraavaksi, että mitta ν on μ-jatkuva, eli on voimassa ehto

$$\mu(E) = 0 \;\Rightarrow\; \nu(E) = 0.$$

Teemme vastaoletuksen: On olemassa $\epsilon > 0$ ja jono joukkoja $A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, siten, että

$$\mu(A_n) < 2^{-n} \quad \text{ja} \quad \nu(A_n) > \epsilon. \tag{3.8}$$

Olkoon

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right).$$

Tällöin

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_m) \leq \sum_{m=n}^{\infty} 2^{-m}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siten $\mu(A) = 0$, joten oletuksen mukaan $\nu\,(A) = 0$. Toisaalta Lauseen 2.1.5 nojalla

$$0 = \nu(A) = \lim_{n \to \infty} \nu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right) \geq \epsilon,$$

sillä

$$\nu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_m \right) \geq \nu(A_n) \geq \epsilon$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tässä on ristiriita, joten ehto (3.8) ei ole voimassa. Siis ehto (3.7) on voimassa. □

Tarvitsemme seuraavaa aputulosta jatkossa.

Lemma 3.5.3 *Olkoon $\mathcal{B}$ σ-algebra joukossa X ja funktio*

$$\rho: \;\mathcal{B} \to \mathbb{R}$$

täydellisesti additiivinen. Tällöin on olemassa joukko $X_0 \in \mathcal{B}$, joka toteuttaa ehdot

$$\rho(X_0) \geq \rho(X)$$

ja

$$\rho(A) \geq 0$$

kaikilla $A \in X_0 \cap \mathcal{B}$.

Todistus. Jos $\rho(X) \leq 0$, niin voimme valita $X_0 = \emptyset$, sillä $\rho(\emptyset) = 0$. Oletamme, että $\rho(X) > 0$. Osoitamme, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa joukko $X_\epsilon \in \mathcal{B}$ siten, että

$$\rho(X_\epsilon) \geq \rho(X)$$

ja

$$\rho(A) > -\epsilon$$

kaikilla $A \in X_\epsilon \cap \mathcal{B}$. Jos $\rho(A) > -\epsilon$ jokaiselle $A \in \mathcal{B}$, voimme valita $X_\epsilon = X$. Oletamme, että on olemassa $A_1 \in \mathcal{B}$ siten, että $\rho(A_1) \leq -\epsilon$. Tällöin

$$\rho(X \setminus A_1) = \rho(X) - \rho(A_1) \geq \rho(X) + \epsilon > \rho(X).$$

Jos kaikille $A \in (X \setminus A_1) \cap \mathcal{B}$ pätee $\rho(A) > -\epsilon$, niin valitsemme $X_\epsilon = X \setminus A_1$. Jos tämä ei päde, niin on olemassa $A_2 \in (X \setminus A_1) \cap \mathcal{B}$ siten, että $\rho(A_2) \leq -\epsilon$. Tällöin on voimassa

$$\rho(X \setminus (A_1 \cup A_2)) = \rho(X) - \rho(A_1) - \rho(A_2) \geq \rho(X) + 2\epsilon > \rho(X).$$

Siis, jos kaikilla $A \in (X \setminus (A_1 \cup A_2)) \cap \mathcal{B}$ pätee $\rho(A) > -\epsilon$, niin valitsemme $X_\epsilon = X \setminus (A_1 \cup A_2)$. Oletamme, että jatkamme menetelmää ja saamme jonon $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, joka toteuttaa ehdot $\rho(A_n) \leq -\epsilon$,

$$A_n \in \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \cap \mathcal{B} \quad \text{ja} \quad \rho\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) > \rho(X).$$

Siis $A_n \cap A_k = \emptyset$ jokaiselle $k \neq n$. Tällöin

$$\rho\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \rho(A_i) \leq -k\epsilon$$

ja edelleen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i) = -\infty.$$

Mutta toisaalta

$$\rho(A) = \rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) = -\infty$$

ja $-\infty \notin \mathbb{R}$, missä on ristiriita. Siis jokaiselle $\varepsilon > 0$ voimme valita

$$X_\epsilon = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right)$$

jollekin $k \in \mathbb{N}$.

Valitsemme joukon X_1 siten, että $\rho\,(X_1) \geq \rho\,(X)$ ja $\rho(A) > -1$ kaikille $A \in X_1 \cap \mathcal{B}$. Edelleen valitsemme joukon $X_{\frac{1}{2}} \in X_1 \cap \mathcal{B}$ siten, että

$$\rho(X_{\frac{1}{2}}) \geq \rho(X_1)$$

ja $\rho(A) > -\frac{1}{2}$ kaikille $A \in X_{\frac{1}{2}} \cap X_1 \cap \mathcal{B}$. Jatkamalla näin saamme induktiivisesti jonon joukkoja $X_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{B}$, jotka toteuttavat ehdot

$$\begin{aligned} X_{\frac{1}{n+1}} &\subset X_{\frac{1}{n}}, \\ \rho(X_{\frac{1}{n+1}}) &\geq \rho(X_{\frac{1}{n}}) \geq \ldots \geq \rho(X) \end{aligned}$$

ja

$$\rho(A) > -\frac{1}{n+1}$$

kaikilla $A \in X_{\frac{1}{n+1}} \cap \mathcal{B}$. Valitsemme

$$X_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_{\frac{1}{n}}.$$

Koska ρ on äärellinen, niin vastaavasti kuin Lauseen 2.1.6 todistuksessa voimme osoittaa, että

$$\rho(X_0) = \lim_{n \to \infty} \rho(X_{\frac{1}{n}}) \geq \rho(X).$$

Lisäksi jokaiselle $A \in X_0 \cap \mathcal{B} \subset X_{\frac{1}{n}} \cap \mathcal{B}$ pätee

$$\rho(A) > -\frac{1}{n}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$ eli $\rho(A) \geq 0$. $\square$

Määritelmä 3.5.4 *Mittaa μ sanomme σ-äärelliseksi mitallisessa avaruudessa $(X, \mathcal{B})$, jos on olemassa äärellismittaiset joukot X_i siten, että*

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = X.$$

Esimerkiksi $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ on σ-äärellinen, sillä

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$$

ja

$$m([-n, n]) = l([-n, n]) = 2n$$

Todistamme seuraavan teknisen aputuloksen

Lemma 3.5.5 *Olkoon $\mathcal{D}$ perhe mitallisia ei-negatiivisia funktioita mitta-avaruudesssa $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ja oletetaan, että $\max(f_1, f_2) \in \mathcal{D}$ jokaiselle $f_1, f_2 \in \mathcal{D}$. Jos*

$$\alpha = \sup_{f \in \mathcal{D}} \int f \, d\mu,$$

niin on olemassa kasvava jono $(f_n) \subset \mathcal{D}$ siten, että

$$\alpha = \int \lim_{n \to \infty} f_n \, d\mu.$$

Todistus. Valitsemme funktion f_1, jolle pätee $\int f_1 \, d\mu > \alpha - 1$. Seuraavaksi valitsemme funktion f_2' siten, että $\int f_2' \, d\mu > \alpha - \frac{1}{2}$, ja sen jälkeen valitsemme

$$f_2 = \max\{f_1, f_2'\}.$$

Jatkamalla tätä prosessia saamme kasvavan jonon funktioita $f_n \in \mathcal{D}$, joille pätee $\int f_n \, d\mu > \alpha - \frac{1}{n}$. Merkitsemme

$$f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n.$$

Nyt voimme soveltaa Monotonista konvergenssilausetta 3.1.7, jolloin saamme

$$\int f \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu = \alpha.$$

Lause 3.5.6 (RADON-NIKODYM LAUSE) *Olkoot μ ja ν mittoja joukossa X määritellyssä σ-algebrassa $\mathcal{B}$. Jos μ on σ-äärellinen, niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) *Mitta ν on μ-jatkuva.*

(ii) *On olemassa mitallinen funktio f siten, että*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

jokaiselle $A \in \mathcal{B}$.

Todistus. ((i) $\Rightarrow$ (ii)) Olkoon mitta ν μ-jatkuva, eli että

$$\mu(E) = 0 \;\Rightarrow\; \nu(E) = 0$$

jokaiselle $E \in \mathcal{B}$. Oletamme ensiksi, että mitat μ ja ν ovat äärellisiä. Merkitsemme

$$\mathcal{D} = \left\{ f \;\mid\; f \geq 0, \int_E f d\mu \leq \nu(E) \;\; \forall E \in \mathcal{B} \right\}.$$

Tällöin joukko $\mathcal{D}$ on epätyhjä, sillä 0 kuuluu joukkoon $\mathcal{D}$. Jos f_1 ja f_2 kuuluvat joukkoon $\mathcal{D}$, niin

$$f = \max\{f_1, f_2\} \in \mathcal{D},$$

sillä jos merkitsemme

$$E_1 = E \cap \{f_1 \geq f_2\} \text{ ja } E_2 = E \cap \{f_1 < f_2\},$$

niin voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu = \int_{E_1} f_1 \, d\mu + \int_{E_2} f_2 \, d\mu \\ &\leq \nu(E_1) + \nu(E_2) = \nu(E) \end{aligned}$$

kaikille $E \in \mathcal{B}$. Induktiivisesti saamme

$$\max\{f_1, \ldots f_n\} \in \mathcal{D},$$

kun f_i kuuluu joukkoon $\mathcal{D}$ jokaiselle $i = 1, ..., n$. Merkitsemme

$$\alpha = \sup_{f \in \mathcal{D}} \int f \, d\mu \leq \nu(X) < \infty,$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa siitä, että mitta ν on äärellinen. Tällöin on edellisen lemman nojalla olemassa kasvava jono mitallisia funktioita $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ siten, että

$$\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu.$$

Osoitamme, että

$$\int_A f\,d\mu = \nu(A)$$

jokaiselle $A \in \mathcal{B}$. Huomaamme, että funktio f kuuluu joukkoon $\mathcal{D}$ Monotonisen konvergenssilauseen nojalla. Tämän takia vastaoletus on siis: On olemassa $A \in \mathcal{B}$ siten, että

$$\int_A f\,d\mu < \nu(A).$$

Olkoon τ mitta siten, että

$$\tau(B) = \nu(B) - \int_B f\,d\mu.$$

jokaiselle $B \in \mathcal{B}$. Koska ν on μ-jatkuva, niin $\mu(X) > 0$, sillä muutoin $\nu(X) = 0$ ja edelleen $\nu(A) = 0$, mistä seuraisi ristiriita. Olkoon

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{\tau(X)}{\mu(X)} > 0.$$

Jos pätisi ehto $\tau(X) = 0$, niin $\tau(A) = 0$, mikä on mahdotonta. Siis

$$\tau(X) = 2\beta\mu(X) > \beta\mu(X),$$

eli

$$\tau(X) - \beta\mu(X) > 0.$$

Lemman 3.5.3 nojalla on olemassa $X_0 \in \mathcal{B}$ siten, että

$$\tau(X_0) - \beta\mu(X_0) \geq \tau(X) - \beta\mu(X) > 0 \tag{3.9}$$

ja

$$\tau(B) - \beta\mu(B) \geq 0$$

kaikilla $B \in X_0 \cap \mathcal{B}$. Olkoon nyt

$$f_0 = f + \beta\chi_{X_0}.$$

Tällöin

$$\int_B f_0\, d\mu = \int_B f\, d\mu + \beta\mu(X_0 \cap B) \leq \int_B f\, d\mu + \tau(B) = \nu(B)$$

kaikilla $B \in \mathcal{B}$, sillä $X_0 \cap B$ kuuluu joukkoon $X_0 \cap \mathcal{B}$. Siten funktio f_0 kuuluu joukkoon $\mathcal{D}$. Tällöin arvon α määritelmän nojalla $\int f_0\, d\mu \leq \alpha$. Mutta toisaalta

$$\alpha \geq \int f_0\, d\mu = \int f\, d\mu + \beta\mu(X_0) = \alpha + \beta\mu(X_0),$$

joten $\mu\,(X_0) = 0$. Koska ν on μ-jatkuva, niin $\nu\,(X_0) = 0$. Siis

$$\tau\,(X_0) + \int_{X_0} f\, d\mu = 0,$$

joten $\tau\,(X_0) = \mu\,(X_0) = 0$, mikä on ristiriidassa epäyhtälön 3.9 kanssa. Näin ollen

$$\int_A f\, d\mu = \nu(A).$$

Siis (ii) on voimassa, kun mitat μ ja ν ovat äärellisiä.

Seuraavaksi oletamme, että $\nu(X) = \infty$, mutta $\mu(X) < \infty$. Olkoon

$$\mathcal{A} = \{\chi_Q \mid Q \in \mathcal{B},\ \nu(Q) < \infty\}.$$

Joukko $\mathcal{A}$ toteuttaa edellisen lemman oletukset. Merkitsemme

$$\beta = \sup_{f \in \mathcal{A}} \int f\, d\mu = \sup_{Q \in \mathcal{A}} \mu(Q) < \infty,$$

missä epäyhtälö seuraa mitan μ äärellisyydestä. Tällöin edellisen lemman nojalla on olemassa perheessä $\mathcal{A}$ kasvava jono joukkoja $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siten, että

$$\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(Q_n).$$

Merkitsemme

$$Q_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n.$$

Koska $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on kasvava jono, niin

$$\mu(Q_0) = \sup_n \mu(Q_n) = \beta.$$