$$\int_B f_0\, d\mu = \int_B f\, d\mu + \beta\mu(X_0 \cap B) \le \int_B f\, d\mu + \tau(B) = \nu(B)$$

kaikilla $B \in \mathcal{B}$, sillä $X_0 \cap B$ kuuluu joukkoon $X_0 \cap \mathcal{B}$. Siten funktio f_0 kuuluu joukkoon $\mathcal{D}$. Tällöin arvon α määritelmän nojalla $\int f_0\, d\mu \le \alpha$. Mutta toisaalta

$$\alpha \ge \int f_0\, d\mu = \int f\, d\mu + \beta\mu(X_0) = \alpha + \beta\mu(X_0),$$

joten $\mu(X_0) = 0$. Koska ν on μ-jatkuva, niin $\nu(X_0) = 0$. Siis

$$\tau(X_0) + \int_{X_0} f\, d\mu = 0,$$

joten $\tau(X_0) = \mu(X_0) = 0$, mikä on ristiriidassa epäyhtälön 3.9 kanssa. Näin ollen

$$\int_A f\, d\mu = \nu(A).$$

Siis (ii) on voimassa, kun mitat μ ja ν ovat äärellisiä.

Seuraavaksi oletamme, että $\nu(X) = \infty$, mutta $\mu(X) < \infty$. Olkoon

$$\mathcal{A} = \{\chi_Q \mid Q \in \mathcal{B},\ \nu(Q) < \infty\}.$$

Joukko $\mathcal{A}$ toteuttaa edellisen lemman oletukset. Merkitsemme

$$\beta = \sup_{f \in \mathcal{A}} \int f\, d\mu = \sup_{Q \in \mathcal{A}} \mu(Q) < \infty,$$

missä epäyhtälö seuraa mitan μ äärellisyydestä. Tällöin edellisen lemman nojalla on olemassa perheessä $\mathcal{A}$ kasvava jono joukkoja $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siten, että

$$\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(Q_n).$$

Merkitsemme

$$Q_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n.$$

Koska $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on kasvava jono, niin

$$\mu(Q_0) = \lim_{n\to\infty} \mu(Q_n) = \sup_n \mu(Q_n) = \beta.$$

Olkoon $X_0 = X \setminus Q_0$. Olkoon nyt $A \in X_0 \cap \mathcal{B}$. Jos $\nu(A) < \infty$, niin

$$\beta \geq \lim_{n\to\infty} \mu\left(A \cup Q_n\right) = \mu(A \cup Q_0) = \mu(A) + \mu(Q_0) = \mu(A) + \beta,$$

joten $\mu(A) = 0$. Koska ν on μ-jatkuva, niin lisäksi $\nu(A) = 0$. Siis jos $A \in X_0 \cap \mathcal{B}$ ja $\nu(A) < \infty$, niin $\mu(A) = 0$ ja $\nu(A) = 0$. Edelleen jos $A \in X_0 \cap \mathcal{B}$ ja $\nu(A) = \infty$, niin $\mu(A) > 0$. Siis kun määrittelemme $f_0 = \infty$, niin

$$\int_B f_0 \, d\mu = \nu\left(B\right)$$

jokaiselle $B \in X_0 \cap \mathcal{B}$.

Merkitsemme $X_n = Q_n \setminus Q_{n-1}$ ja määrittelemme mitat ν_n asettamalla

$$\nu_n\left(B\right) = \nu\left(B \cap X_n\right)$$

jokaiselle $B \in \mathcal{B}$. Tällöin ν_n on äärellinen mitta ja μ-jatkuva, sillä

$$\mu\left(B\right) = 0 \Rightarrow \mu\left(B \cap X_n\right) = 0 \Rightarrow \nu_n\left(B\right) = \nu\left(B \cap X_n\right) = 0.$$

Siis alkuosan todistuksen perusteella on olemassa funktio f_n siten, että

$$\nu_n(B) = \int_B f_n \, d\mu, \; B \in X_n \cap \mathcal{B}.$$

Määrittelemme funktion f seuraavasti

$$f(x) = \begin{cases} f_0, & \text{kun } x \in X_0 \\ f_n, & \text{kun } x \in X_n \end{cases}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \int_B f \, d\mu &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{X_n \cap B} f \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{X_n \cap B} f_n \, d\mu \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(X_n \cap B) = \nu(B). \end{aligned}$$

Näin ollen väite (ii) on voimassa myös tapauksessa $\nu\left(X\right) = \infty$ ja $\mu\left(X\right) < \infty$.

Olkoon mitta μ seuraavaksi σ-äärellinen ja ν mielivaltainen. Tällöin on olemassa pistevieraat mitalliset joukot G_n siten, että

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \quad \text{ja} \quad \mu(G_n) < \infty.$$

Määritellään mitat μ_n' ja ν_n' asettamalla

$$\mu_n'(A) = \mu(A \cap G_n) \quad \text{ja} \quad \nu_n'(A) = \nu(A \cap G_n).$$

Edellisten kohtien nojalla on olemassa funktio f_n siten, että

$$\nu(A \cap G_n) = \nu_n'(A) = \int_A f_n \, d\mu_n' = \int_{A \cap G_n} f_n \, d\mu$$

kaikilla $A \in \mathcal{B}$. Kun määrittelemme $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \chi_{G_n}$, niin saamme

$$\begin{aligned} \int_A f \, d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap G_n} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap G_n} f_n \, d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap G_n) = \nu(A), \end{aligned}$$

missä viimeinen vaihe seuraa siitä, että ν on mitta ja joukot G_n pistevieraita. Näin ollen väite on todistettu toiseen suuntaan.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Harjoitustehtävä. $\square$

Tämän lauseen mukaan, jos mitta ν on μ-jatkuva, niin on olemassa mitallinen funktio f siten, että yhtälö

$$\int g \, d\nu = \int f g \, d\mu$$

pätee jokaiselle mitalliselle funktiolle g, jolle $\int g \, d\nu$ on olemassa. Tämän saamme helposti: Olkoon g ensiksi yksinkertainen, eli

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i},$$

missä joukot E_i ovat pistevieraita. Tällöin

$$\begin{aligned} \int g \, d\nu &= \sum_{i=1}^{n} a_i \nu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{E_i} f \, d\mu \\ &= \int \sum_{i=1}^{n} a_i f \chi_{E_i} \, d\mu = \int g f \, d\mu. \end{aligned}$$

Edelleen, jos $g \geq 0$, niin

$$g = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n,$$

missä jono (g_n) on kasvava jono yksinkertaisia funktioita, jolloin Monotonisen konvergenssilauseen 3.1.7 nojalla

$$\begin{aligned}\int g\, d\nu &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g_n\, d\nu \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g_n f\, d\mu \\ &= \int gf\, d\mu.\end{aligned}$$

Koska lisäksi $g = g^+ - g^-$, niin saamme väitteen voimaan kaikille funktioille g, joille $\int g\, d\nu$ on olemassa.

Määritelmä 3.5.7 *Olkoon $(X, \mathcal{B})$ mitallinen avaruus ja olkoot μ ja ν mittoja tässä. Merkitsemme*

$$\nu \ll \mu,$$

jos ν on μ-jatkuva. Lisäksi merkitsemme

$$\nu \perp \mu,$$

jos on olemassa $E \in \mathcal{B}$ siten, että

$$\mu(E) = 0 \quad \text{ja} \quad \nu(X \setminus E) = 0.$$

Jos $\nu \perp \mu$, sanomme, että ν on μ-singulaarinen.

Mitan ν singulaarisuun toisen mitan μ suhteen merkitsee sitä, että on olemassa joukko E, joka toteuttaa ehdot

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \backslash E) = \nu(A \backslash E)$$

ja

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \backslash E) = \mu(A \cap E)$$

jokaiselle mitalliselle joukolle A. Siis jos $\nu \perp \mu$, niin on olemassa sellainen joukko E, että mitta μ mittaa joukkoon E kuuluvaa osaa ja ν mittaa joukkoon $X \backslash E$ kuuluvaa osaa.

Esimerkki 3.5.8 *Olkoon $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ Lebesguen mitta-avaruus. Määritellään σ-algebrassa $\mathcal{M}$ Diracin mitta seuraavasti*

$$\varepsilon_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A, \\ 0, & \text{kun } x \notin A. \end{cases}$$

Tällöin $\varepsilon_x \perp m$.

Voimme jakaa σ-äärellisen mitan ν kahteen osaan, joista toinen on μ-jatkuva ja toinen on μ-singulaarinen. Tämä käy ilmi seuraavasta lauseesta.

Lause 3.5.9 (LEBESGUEN JAKOLAUSE) *Oletetaan, että mitat μ ja ν ovat σ-äärellisiä mittoja joukossa X määritellyssä σ-algebrassa $\mathcal{B}$. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset mitat ν_1 ja ν_2 joukossa $\mathcal{B}$, jotka toteuttavat ehdot*

$$\nu = \nu_1 + \nu_2$$

ja

$$\nu_1 \ll \mu \quad \textit{ja} \quad \nu_2 \perp \mu.$$

Todistus. Todistamme tämän tapauksessa, jossa mitat ν ja μ ovat äärellisiä. Merkitsemme

$$\mathcal{N}_\mu = \{A \mid A \in \mathcal{B},\ \mu(A) = 0\}.$$

Koska $\nu(X)$ on äärellinen, niin

$$\sup_{A \in \mathcal{N}_\mu} \nu(A) = \alpha < \infty.$$

Lemman 3.5.5 nojalla on olemassa kasvava jono $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ joukkoja siten, että

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = \alpha.$$

Merkitsemme

$$N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Koska jono (A_n) on kasvava, niin

$$\mu(N) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = 0,$$

joten $N \in \mathcal{N}_\mu$. Toisaalta

$$\nu(N) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = \alpha < \infty. \tag{3.10}$$

Todistamme vaaditut ehdot seuraaville mitoille ν_1 ja ν_2

$$\nu_1(A) = \nu(A \setminus N) \quad \text{ja} \quad \nu_2(A) = \nu(A \cap N), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Tällöin $\nu = \nu_1 + \nu_2$. Toisaalta ν_1 on μ-jatkuva, sillä, jos $\mu(E) = 0$, niin $E \setminus N \subset E \in \mathcal{N}_\mu$ ja edelleen $(E \setminus N) \cup N \in \mathcal{N}_\mu$. Näin ollen yhtälön (3.5) nojalla pätee

$$\alpha + \nu(E \setminus N) = \nu(E \setminus N) + \nu(N) = \nu((E \setminus N) \cup E) \leq \alpha.$$

Siis

$$\nu_1 (E) = \nu(E \setminus N) = 0,$$

joten ν_1 on μ-jatkuva. Lisäksi ν_2 on μ-singulaarinen, sillä

$$\mu (N) = 0 \quad \text{ja} \quad \nu_2 (X \backslash N) = \nu ((X \backslash N) \cap N) = 0.$$

Tämän jälkeen on todistettava vielä yksikäsitteisyys. Oletamme, että

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 = \nu_1' + \nu_2',$$

missä myös ν_1' on μ-jatkuva ja ν_2' on μ-singulaarinen. Koska myös ν_2' on μ-singulaarinen, niin on olemassa N' siten, että $\mu(N') = 0$ ja $\nu_2'(X \setminus N') = 0$. Olkoon nyt $N_0 = N \cup N'$. Koska $\mu(N) = \mu(N') = 0$, niin

$$\mu(N_0) \leq \mu(N) + \mu(N') = 0.$$

Koska $\mu(N_0) = 0$ ja ν_1 ja ν_1' ovat μ-jatkuvia, niin $\nu_1(N_0) = \nu_1'(N_0) = 0$. Olkoon $A \in \mathcal{B}$. Tällöin

$$\nu_1(A \cap N_0) = \nu_1'(A \cap N_0) = 0.$$

Koska $\nu_2'(X \setminus N') = 0 = \nu_2 (X \backslash N)$ ja $X \backslash N_0 \subset X \backslash N^{'}$, $X \backslash N_0 \subset X \backslash N$, niin $\nu_2'(X \setminus N_0) = 0 = \nu_2 (X \backslash N_0)$. Näin ollen saamme

$$\begin{aligned} \nu_2' (A) &= \nu_2'(A \setminus N_0) + \nu_2'(A \cap N_0) = \nu_2'(A \cap N_0) \\ \nu_2 (A) &= \nu_2(A \setminus N_0) + \nu_2(A \cap N_0) = \nu_2(A \cap N_0) \end{aligned}$$

Siis saamme

$$\begin{aligned} \nu(A \cap N_0) &= \nu_1(A \cap N_0) + \nu_2(A \cap N_0) = \nu_2(A \cap N_0) \\ &= \nu_2(A \cap N) + \nu_2 ((A \cap N_0) \backslash N) = \nu_2 (A) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \nu(A \cap N_0) &= \nu_1'(A \cap N_0) + \nu_2'(A \cap N_0) = \nu_2'(A \cap N_0) \\ &= \nu_2^{'}(A \cap N) + \nu_2^{'} ((A \cap N_0) \backslash N) = \nu_2'(A). \end{aligned}$$

Nämä yhdistämällä saamme

$$\nu_2(A) = \nu(A \cap N_0) = \nu_2'(A).$$

Tämän lisäksi koska

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 = \nu_1' + \nu_2',$$

niin myös

$$\nu_1 = \nu_1',$$

koska ν on äärellinen. Siis mitat ν_1 ja ν_2 ovat yksikäsitteiset.

Tapaus ν ja μ ovat σ-äärellisiä voidaan todistaa vastaavasti kuin Radon-Nikodyn lauseessa ja jätämme sen harjoitustehtäväksi. $\square$

3.6 Riemann-Sieltjes integraali

Yleistetään hivenen Riemannin integraalia. Olkoon $[a, b]$ suljettu väli, $a < b$, ja olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Olkoon $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ kasvava ja oikealta jatkuva. Funktiota F kutsutaan *painofunktioksi* (tai jakaumafunktioksi tai kertymäfunktioksi). Kuten Riemannin integraalissa jaamme välin $[a, b]$ osaväleiksi. Olkoon $P = \{x_0, ..., x_n\}$ välin $[a, b]$ jako siten, että $x_0 = a$ ja $x_n = b$. Määrittelemme reaaliluvut M_i ja m_i samalla tavalla kuin Riemannin integraalissa:

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(y) \mid x_{i-1} < y \le x_i\}, \\ m_i &= \inf\{f(y) \mid x_{i-1} < y \le x_i\}. \end{aligned}$$

Näiden avulla puolestaan jakoa P vastaavan yläsumman $U(P)$ ja alasumman $L(P)$ määrittelemme seuraavasti:

$$\begin{aligned} U(P, F) &= \textstyle\sum_{i=1}^n M_i \left(F(x_i) - F(x_{i-1})\right), \\ L(P; F) &= \textstyle\sum_{i=1}^n m_i \left(F(x_i) - F(x_{i-1})\right). \end{aligned}$$

Siis yläsummat ja alasummat saadaan Riemannin ylä- ja alasummista, kun välin $[x_{i-1}, x_i]$ pituus korvatataan arvolla $F(x_i) - F(x_{i-1})$. Huomattakoon, että $F(x_i) - F(x_{i-1}) \ge 0$, sillä F on kasvava. Jos $F(x) = x$, niin saamme tavalliset Riemannin ylä- ja alasummat. Edelleen asetamme

$$|P| = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}).$$

Jakoa P vastaavat porrasfunktiot α_P ja β_P ovat

$$\begin{aligned}\alpha_P(x) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \chi_{]x_{i-1},x_i]}(x) = M_i, \text{ kun } x \in]x_{i-1}, x_i], \\ \beta_P(x) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \chi_{]x_{i-1},x_i]}(x) = m_i, \text{ kun } x \in]x_{i-1}, x_i].\end{aligned}$$

Määritelmä 3.6.1 *Rajotettu funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-Stieltjes integroituva painofunktion F suhteen, jos*

$$\sup_P L(P,F) = \inf_P U(P,F).$$

Jos f on Riemann-Stieltjes integroituva painofunktion F suhteen, niin funktion f Riemann-Stieltjes integraali on

$$\int_a^b f\,dF = \sup_P L(P,F) = \inf_P U(P,F).$$

Määritelmä 3.6.2 *Lebesgue-Stieltjes mitta reaalilukujen joukossa on Borelin joukkojen luokassa $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ määtitelty mitta μ, jolle pätee $\mu(I) < \infty$ jokaiselle rajoitetulle välille $I \subset \mathbb{R}$.*

Lause 3.6.3 *Jos μ on Lebesgue-Stieltjes mitta reaalilukujen joukossa, niin funktio F*

$$F(x) = \begin{cases} C & \text{kun } x = 0 \\ \mu(]0,x]) + C & \text{kun } x > 0 \\ C - \mu(]0,x]) & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$

on painofunktio.

Lause 3.6.4 *Jos F on painofunktio, niin on olemassa Lebesgue-Stieltjes mitta μ_F,joka toteuttaa ehdon*

$$\mu_F(]a,b]) = F(b) - F(a)$$

jokaiselle $a < b$.

Todistus. Tulos seuraa Charathéoryn laajennuslauseesta.

Olkoon $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ kasvava ja oikealta jatkuva. Tällöin F voidaan helposti laajentaa koko joukkoon $\mathbb{R}$ kasvavaksi ja oikealta jatkuvaksi. Porrasfunktiot ovat yksinkertaisia funktioita, joten

$$U(P) = \int_a^b \alpha_P \, dF = \int_{[a,b]} \alpha_P d\mu_F$$

ja

$$L(P) = \int_a^b \beta_P \, dF = \int_{[a,b]} \beta_P d\mu_F$$

missä μ_F on Lebesgue-Stieltjes mitta.

Funktio f on Riemann–Stieltjes integroituva, kun

$$\sup_P L(P) = \inf_P U(P) = \int_a^b f \, dF.$$

Lemma 3.6.5 *Rajoitettu funktio f on Riemann-Stieltjes integroituva, jos ja vain jos on olemassa jaot $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ siten, että*

$$\lim_{k\to\infty} |P_k| = 0,$$

ja jakoja vastaavat porrasfunktiot α_k ja β_k toteuttavat seuraavat ehdot:

(1) $\alpha_k \geq f \geq \beta_k$.

(2) *Jono $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on kasvava.*

(3) *Jono $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on vähenevä.*

(4) *Porrasfunktioiden Lebesgue-integraalien raja-arvot ovat yhtäsuuret:*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \alpha_k \, d\mu_F = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \beta_k \, d\mu_F.$$

Todistus. Olkoon ensiksi f Riemann-Stieltjes integroituva ja $c = \int_a^b f \, dx$. Tällöin on olemassa jaot P_{1n} ja P_{2n}, jotka toteuttavat ehdot $|P_{1n}| \to 0$, $|P_{2n}| \to 0$ ja

$$\begin{array}{lcl} c & = & \inf_n U(P_{1n}) = \sup_n L(P_{2n}), \\ c - \frac{1}{n} & < & L(P_{2n}), \\ U(P_{1n}) & < & c + \frac{1}{n}. \end{array}$$

Voimme tarvitaessa jakoja tihentämällä olettaa, että $P_{1n} \subset P_{1(n+1)}$ ja $P_{2n} \subset P_{2(n+1)}$. Olkoon

$$P_n = P_{1n} \cup P_{2n},$$

eli jako, joka sisältää molenpien jakojen P_{1n} sekä P_{2n} jakopisteet. Tällöin

$$U(P_n) \leq U(P_{1n}) \leq \alpha + \frac{1}{n}$$

ja

$$L(P_n) \geq L(P_{2n}) \geq \alpha - \frac{1}{n},$$

sillä yläsummat laskevat jakoa tihennettäessä ja vastaavasti alasummat kasvavat. Olkoon α_k ja β_k jakoa P_k vastaavat porrasfunktiot. Tällöin siis

$$\beta_k \leq f \leq \alpha_k,$$

ja

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \alpha_k d\mu_F = \lim_{k\to\infty} U(P_k) = \lim_{k\to\infty} L(P_k) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \beta_k d\mu_F$$

Lisäksi porrasfunktiojono $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on kasvava ja porrasfunktiojono $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on vähenevä, sillä jaot tihenevät. Näin ollen siis ehdot (1)–(4) ovat voimassa.

Olkoot seuraavaksi ehdot (1)–(4) voimassa ja oletetaan, että jaot P_k, $k \in \mathbb{N}$ toteuttavat ehdot (1)–(4). Olkoon lisäksi P mielivaltainen välin $[a, b]$ jako. Tällöin saamme

$$U(P) \geq U(P \cup P_k) \geq L(P \cup P_k) \geq L(P)$$

ja

$$U(P_k) \geq U(P \cup P_k) \geq L(P \cup P_k) \geq L(P_k).$$

Siis ehdon (4) nojalla

$$\inf_P U(P) = \sup_P L(P).$$

Näin ollen funktio f on Riemann-Stieltjes integroituva. □

Lause 3.6.6 *Olkoon $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ kasvava ja oikealta jatkuva ja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu reaaliarvoinen funktio sekä $a < b$. Tällöin*

(a) *f on Riemann-Stietjes integroituva, jos ja vain jos f on melkein kaikkialla jatkuva.*

(b) *Jos f on Riemann-Stietjes integroituva, niin f on integroituva Lebesgue-Stietjes mitan taydennyksen $\overline{\mu}_F$ (katso Charathéoryn laajennuslause) suhteen ja*

$$\int_{[a,b]} f\, d\overline{\mu}_F = \int_a^b f\, dF.$$

Todistus. (a) Olkoon funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-Stieltjes integroituva. Tällöin on olemassa jaot (P_k), jotka toteuttavat ehdon $|P_k| \to 0$ ja joita vastaavat porrasfunktiot toteuttavat Lemman 3.3.1 ehdot (1)–(4). Merkitsemme

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \alpha_k \quad \text{ja} \quad \beta = \lim_{k\to\infty} \beta_k.$$

Nämä ovat olemassa, sillä (α_k) on laskeva jono ja (β_k) on kasvava jono porrasfunktioita. Tällöin Monotonisen konvergenssilauseen 3.1.7 nojalla saamme

$$\lim_{k\to\infty} U(P_k) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \alpha_k d\mu_F = \int\limits_{[a,b]} \lim_{k\to\infty} \alpha_k d\mu_F = \int\limits_{[a,b]} \alpha d\mu_F.$$

Vastaavasti pätee

$$\lim_{k\to\infty} L(P_k) = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \beta_k d\mu_F = \int_{[a,b]} \beta d\mu_F.$$

Koska f on Riemann-Stieltjes integroituva, niin

$$\int_{[a,b]} \alpha\, d\mu_F = \int_{[a,b]} \beta\, d\mu_F = \int_a^b f\, dF.$$

Siis ehdosta $\alpha \geq \beta$ seuraa

$$\int_{[a,b]} (\alpha - \beta)\, d\mu_F = 0$$

ja edelleen $\alpha = \beta$ melkein kaikkialla mitan μ_F suhteen. Koska Lemman 3.3.1 perusteella $\alpha \geq f \geq \beta$, niin

$$\alpha = \beta = f \quad \text{melkein kaikkialla mitan } \mu_F\text{-suhteen.} \tag{3.11}$$

Osoitamme, että f on jatkuva joukossa

$$A = \{t \mid \alpha(t) = \beta(t)\} \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k \right).$$

Olkoon $x \in A$. Tällöin

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_k(x) = \lim_{k \to \infty} \beta_k(x) = f(x).$$

Tällöin on siis olemassa luonnollinen luku n_ϵ siten, että

$$|f(x) - \alpha_k(x)| < \varepsilon$$

ja

$$|f(x) - \beta_k(x)| < \varepsilon$$

kaikilla $k \geq n_\epsilon$. Olkoon $k \geq n_\epsilon$. Valitsemme

$$\delta = \frac{\min(x_i - x, x - x_{i-1})}{2},$$

missä piste x kuuluu jaon P_k jakovälille $]x_{i-1}, x_i[$. Olkoon $|x - y| < \delta$. Tällöin

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - \alpha_k(x)| + |\alpha_k(x) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - \alpha_k(x)| + |\alpha_k(x) - \alpha_k(y)| + |\alpha_k(y) - f(y)| \end{aligned}$$

Ehdosta $|x - y| < \delta$ seuraa, että pisteet x ja y kuuluvat samalle jakovälille, joten edellisen epäyhtälön oikean puolen keskimmäinen termi on nolla ja

$$\beta_k(x) = \beta_k(y) \leq f(y) \leq \alpha_k(y) = \alpha_k(x).$$

Siis saamme

$$\alpha_k(y) - f(y) \leq \alpha_k(x) - \beta_k(x) \leq \alpha_k(x) - f(x) + f(x) - \beta_k(x) \leq 2\epsilon.$$

Näin ollen

$$|f(x) - f(y)| \leq 3\epsilon \quad \text{, kun } |x - y| < \delta.$$

Siis f on jatkuva pisteessä $x \in A$, eli f on melkein kaikkialla jatkuva.

Oletamme seuraavaksi, että f on melkein kaikkialla jatkuva. Olkoon

$$A = \{x \mid f(x) \text{ on jatkuva pisteessä } x\}.$$

Koska f on melkein kaikkialla jatkuva, niin

$$m([a,b] \setminus A) = 0.$$

Olkoon nyt $x \in A$. Tällöin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{kun } |x - y| < \delta.$$

Tällöin kun jako P_k on niin pieni, että $|P_k| < \delta$, niin jakoa P_k vastaaville porrasfunktioille pätee

$$\alpha_k(x) - f(x) \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{ja} \quad f(x) - \beta_k(x) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

ja

$$\alpha_k(x) - \beta_k(x) < \varepsilon.$$

Siis

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k(x) = \lim_{k\to\infty} \beta_k(x) = f(x).$$

Koska α_k ja β_k ovat mitallisia, niin f on mitallinen. Koska f on välillä $[a,b]$ rajoitettu, niin f on Lebesgue-integroituva. Tällöin Lebesguen konvergenssilauseen 3.2.3 nojalla

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \beta_k \, dm &= \int_{[a,b]} \beta \, dm = \int_{[a,b]} f \, dm \\ &= \int_{[a,b]} \alpha \, dm = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \alpha_k \, dm.\end{aligned}$$

Siis Lemman 3.3.1 nojalla f on Riemann-Steiltjes integroituva.

(b) Olkoon f Riemann-Stieltjes integroituva. Koska tuloksen 3.11 nojalla

$$f = \alpha = \lim \alpha_k = \lim \beta_k \quad \text{a.e.}$$

ja $\overline{\mu}_F$ on täydellinen, niin f on $\overline{\mu}_F-$mitallinen. Tällöin Lebesguen konvergenssilauseen 3.2.3 nojalla

$$\int_a^b f\,d\overline{\mu}_F = \lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}\alpha_k d\overline{\mu}_F = \int_{[a,b]}\alpha d\overline{\mu}_F = \int_{[a,b]} f d\overline{\mu}_F,$$

missä viimeinen vaihe seuraa siitä, että $f = \alpha$ melkein kaikkialla. □

Määritelmä 3.6.7 *Funktio* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *on absoluuttisesti jatkuva, jos jokaiselle* $\varepsilon > 0$ *on olemassa sellainen* $\delta > 0$*, että jokaiselle* $n \in \mathbf{N}$ *ja pistevieraiden välien* $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$ *perheelle, jolle* $\sum_{i=1}^n b_i - a_i < \delta$*, pätee*

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \le \varepsilon.$$

Lause 3.6.8 *Olkoon* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *kasvava ja oikealta jatkuva. Tällöin funktion* F *määrämä Lebesgue-Stieltjes mitta* μ_F *toteuttaa ehdon* $\mu_F \ll m$ *jos ja vain jos* F *on absoluuttisesti jatkuva.*

Todistus. Katso [1, p. 70].

Luku 4

Mittakäsitteen laajennus

4.1 Etumerkkiset mitat

Edellisissä luvuissa mitta on voinut saada vain laajennettuja ei-negatiivisia reaaliarvoja. Tässä luvussa laajennamme tämän koko laajennetulle reaalilukualueelle

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\,.$$

Toisaalta tulemme huomaamaan, ettei tämä tuo esiin mitään merkittävää uutta.

Määritelmä 4.1.1 *Olkoon $\mathcal{B}$ σ-algebra joukossa X. Tällöin funktio*

$$\mu : \ \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$$

on etumerkkinen mitta, jos seuraavat ehdot ovat voimassa

(1) *Tyhjän joukon mitta on nolla:*

$$\mu(\emptyset) = 0.$$

(2) *Mitta μ on täydellisesti additiivinen, eli jos joukot A_n ovat pistevieraita, niin*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(3) *Mitta μ saa korkeintaan toisen arvoista $-\infty$ tai $+\infty$.*

Sanomme joukkoa $A \in \mathcal{B}$ positiiviseksi, jos

$$\mu(E) \geq 0, \quad \forall E \in A \cap \mathcal{B}.$$

Vastaavasti sanomme joukkoa $A \in \mathcal{B}$ negatiiviseksi, jos

$$\mu(E) \leq 0\ , \quad \forall E \in A \cap \mathcal{B}.$$

Huomaamme heti, että jos joukko $A \in \mathcal{B}$ on positiivinen, niin etumerkkisen mitan rajoittuma tähän joukkoon on mitta. Lisäksi tyhjä joukko on sekä positiivinen, että negatiivinen. Edelleen on helppo todistaa seuraavat ominaisuudet.

Lemma 4.1.2 **(a)** *Jokaisen mitallisen positiivisen joukon osajoukko on positiivinen.*

(b) *Jos joukot $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ovat positiivisia, niin niiden yhdiste $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ on positiivinen.*

Todistus. (a) Olkoon A positiivinen joukko ja $E \subset A$ mitallinen. Tällöin $E \cap \mathcal{B} \subset A \cap \mathcal{B}$, sillä

$$E \cap \mathcal{B} = A \cap E \cap \mathcal{B}.$$

Siis $\mu(C) \geq 0$ kaikilla $C \in E \cap \mathcal{B}$.

(b) Olkoot joukot $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pistevieraita. Tällöin, jos

$$E \in \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \right) \cap \mathcal{B},$$

niin $E \cap A_i \in A_i \cap \mathcal{B}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja

$$E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (E \cap A_i)\,.$$

Siis

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E) \geq 0,$$

sillä $E \cap A_i \subset A_i$ ja kohdan (a) mukaan $\mu(A_i \cap E) \geq 0$. Näin ollen väite pätee pistevieraille joukoille.

Olkoot seuraavaksi joukot $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mielivaltaisia. Tällöin

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i,$$

missä

$$G_1 = A_i \quad \text{ja} \quad G_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i.$$

Tällöin joukot $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ovat pistevieraita. Lisäksi $G_n \subset A_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten kohdan a) mukaan joukot G_n ovat positiivisia jokaiselle n. Siis joukko

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i,$$

on positiivinen. $\square$

Lause 4.1.3 (HAHNIN JAKOLAUSE) *Olkoon ν etumerkkinen mitta mitallisessa avaruudessa $(X, \mathcal{B})$. Tällöin on olemassa positiivinen joukko A ja negatiivinen joukko B siten, että*

$$X = A \cup B \quad \textit{ja} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Siis $\nu = \nu^+ - \nu^-$, missä

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) \quad \textit{ja} \quad \nu^-(E) = -\nu(E \cap B)$$

ovat mittoja. Lisäksi ν^+ ja ν^- ovat yksikäsitteisiä mittoja, jotka toteuttavat ehdot $\nu^+ \perp \nu^-$ ja $\mu = \nu^+ - \nu^-$.

Todistus. Oletetaan, että $\nu : \mathcal{B} \to [-\infty, \infty[$ on etumerkkinen mitta, joka ei saa arvoa ∞. Jos $\nu(E) \leq 0$ jokaiselle $E \in \mathcal{B}$, niin joukko X on negatiivinen ja väite on voimassa. Merkitsemme

$$\lambda = \sup\left\{\nu(A) \,|\, \nu(A) \geq 0, \text{ joukot A positiivisia}\right\}.$$

Lemman 3.5.5 nojalla on olemassa kasvava jono positiivisia joukkoja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siten, että

$$\lambda = \sup_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n).$$

Lemman 4.1.2 nojalla joukkojen A_n unioni on positiivinen. Merkitsemme tätä unionia

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Tällöin

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu\left(A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu\left(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \lambda.$$

Siis $\lambda < \infty$, sillä ν ei saa arvoa ∞. Olkoon nyt $B = X \setminus A$ ja olkoon $E \in B \cap \mathcal{B}$. Jos $\nu(E) > 0$, niin voimme soveltaa Lemmaa 3.5.3 mittaan ν σ-algebrassa $E \cap \mathcal{B}$. Nimittäin $\nu_{|E\cap\mathcal{B}}$ on reaaliarvoinen, sillä

$$\nu(E) = \nu(F) + \nu(E \setminus F) > 0$$

jokaiselle $F \in E \cap \mathcal{B}$. Siis on olemassa $A_0 \subset E$ siten, että

$$\nu(A_0) \geq \nu(E) > 0$$

ja

$$\nu(C) \geq 0 \quad \text{kaikille } C \in A_0 \cap \mathcal{B}.$$

Näin ollen joukko $A_0 \cup A$ on positiivinen ja

$$\lambda \geq \nu(A_0 \cup A) = \nu(A_0) + \nu(A) = \nu(A_0) + \lambda,$$

sillä A_0 ja A ovat pistevieraita. Mutta tällöin $\nu(A_0) = 0$, missä on ristiriita. Täten

$$\nu(E) \leq 0 \quad \text{kaikille } E \in B \cap \mathcal{B},$$

eli joukko B on negatiivinen.

Yksikäsitteisyyden todistamiseksi Olkoon σ ja μ mittoja, jotka toteutavat ehdot $\nu = \sigma - \mu$ ja $\sigma \perp \mu$. Palautamme ensin mieleen, mitä tarkoittaa $\sigma \perp \mu$. Jos $\sigma \perp \mu$, niin on olemassa joukot A_1 ja B_1, jotka toteuttavat ehdot

$$X = A_1 \cup B_1 \quad \text{ja} \quad A_1 \cap B_1 = \emptyset$$

ja

$$\sigma(B_1) = \mu(A_1) = 0.$$

Tällöin siis

$$\sigma(E) = \sigma(E \cap A_1) \quad \text{ja} \quad \mu(E) = \mu(E \cap B_1)$$

jokaiselle $E \in \mathcal{B}$.

Alkuosan todistuksen perusteella

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) \quad \text{ja} \quad \nu^-(E) = -\nu(E \cap B),$$

Osoitetaan, että $\nu(A \backslash A_1) = \nu(A_1 \backslash A) = 0$. Koska $A \backslash A_1 \subset A$, niin

$$\nu(A \backslash A_1) = \nu^+(A \backslash A_1) \geq 0.$$

Toisaalta $A \backslash A_1 \subset X \backslash A_1 = B_1$ ja $\sigma(B_1) = 0$, joten

$$\begin{aligned} 0 &\leq \nu((A \setminus A_1) \\ &= \sigma(A \setminus A_1) - \mu(A \setminus A_1) \\ &= 0 - \mu(A \setminus A_2) \leq 0, \end{aligned}$$

Siis $\nu(A \setminus A_2) = 0$. Vastaavasti ehdosta $A_1 \backslash A \subset A_1$ seuraa

$$\nu(A_1 \backslash A) = \sigma(A_1 \backslash A) \geq 0.$$

Koska $A_1 \backslash A \subset X \backslash A = B$ ja $\nu^+(B) = 0$, niin

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma(A_1 \backslash A) = \nu(A_1 \backslash A) \\ &= \nu^+(A_1 \backslash A) - \nu^-(A_1 \backslash A) = -\nu^-(A_1 \backslash A) \leq 0. \end{aligned}$$

Siis $\sigma(A_1 \backslash A) = \nu(A_1 \backslash A) = 0$. Käyttämällä todistettua tietoa $\nu(A \backslash A_1) = \nu(A_1 \backslash A) = \sigma(A_1 \backslash A) = 0$ saamme

$$\begin{aligned} \nu^+(E) &= \nu(E \cap A) = \nu(E \cap A \cap A_1) \\ &= \sigma(E \cap A \cap A_1) = \sigma(E \cap A_1) = \sigma(E) \end{aligned}$$

jokaiselle $E \in \mathcal{B}$. Siis $\nu^+ = \sigma$. Aivan vastaavasti $\nu^- = \mu$. $\square$

Koska joukossa voi olla sekä positiivisia että negatiivisia osia mutta sen mitta voi olla silti nolla, niin on syytä määritellä kokonaisheilahtelu. Tällä voimme joskus kuvailla paremmin tällaisia tapauksia.

Määritelmä 4.1.4 *Sanomme mittaa $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ kokonaisheilahteluksi.*

Kokonaisheilahtelun avulla voidaan laajentaa käsitteet μ-jatkuvuus ja μ-singulaarisuus etumerkkisille mitoille ja todistaa Radon-Nikodym lause etumerkkisille mitoille. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi (Katso esim. Friedman 2.12).

Luku 5

Tulomitta

5.1 Dynkin systeemi

Tähän astisessa esityksessä on ollut yksi paha heikkous: emme osaa laskea integraalia muille kuin joukon $\mathbb{R}$ osajoukoille. Tässä luvussa onkin tarkoituksena tarkastella useampiulotteisia tapauksia ja tämän avulla saada hyvä mitta joukossa $\mathbb{R}^n$.

Aluksi määrittelemme σ-algebraa heikomman ominaisuuden nimeltään Dynkin-systeemin.

Määritelmä 5.1.1 *Olkoon X joukko ja $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$. Joukkoa $\mathcal{D}$ kutsumme Dynkin-systeemiksi, jos se toteuttaa ehdot*

(1) *Koko avaruus kuuluu joukkoon $\mathcal{D}$, eli $X \in \mathcal{D}$.*

(2) *Jos $D \in \mathcal{D}$, niin $X \setminus D \in \mathcal{D}$.*

(3) *Jos I on numeroituva indeksijoukko ja joukot $E_i \in \mathcal{D}$ ovat pistevieraita jokaiselle $i \in I$, niin $\bigcup_{i \in I} E_i \in \mathcal{D}$.*

Tämän määritelmän ero σ-algebran määritelmään nähden on siinä, että tässä ei vaadita viimeistä ehtoa kaikille joukoille vaan ainoastaan pistevieraille joukoille. Tulemme huomaamaan, että Dynkin-systeemi on joskus myös σ-algebra.

Idea Dynkin-systeemeissä on siinä, että on helpompi osoittaa joku ensin Dynkin-systeemiksi ja sen jälkeen σ-algebraksi, kuin osoittaa tämä suoraan σ-algebraksi.

Koska σ-algebroissa viimeinen ehto pätee kaikille joukoille E_i, niin selvästikin jokainen σ-algebra on myös Dynkin-systeemi. Seuraavan lemman jälkeen saamme selville, milloin Dynkin-systeemi on σ-algebra.

Lemma 5.1.2 *Olkoon $\mathcal{D}$ Dynkin-systeemi. Jos $D, E \in \mathcal{D}$ ja $D \subset E$, niin $E \setminus D \in \mathcal{D}$.*

Todistus. Koska $E \in \mathcal{D}$, niin $X \setminus E \in \mathcal{D}$. Koska $D \subset E$, niin joukot D ja $X \setminus E$ ovat pistevieraita. Siten ehdon (3) nojalla $D \cup (X \setminus E) \in \mathcal{D}$. Tällöin ehdon (2) mukaan

$$X \setminus (D \cup (X \setminus E)) = E \setminus D \in \mathcal{D},$$

joten väite on voimassa. $\square$

Lause 5.1.3 *Dynkin-systeemi $\mathcal{D}$ on σ-algebra, jos ja vain jos jokaiselle $A, B \in \mathcal{D}$ pätee $A \cap B \in \mathcal{D}$.*

Todistus. ($\Rightarrow$) Jos Dynkin-systeemi on σ-algebra, niin ehto on voimassa, sillä σ-algebra sisältää aina joukkojen leikkaukset.

($\Leftarrow$) Oletamme, että $\mathcal{D}$ on Dynkin-systeemi ja että $A \cap B \in \mathcal{D}$ kaikilla $A, B \in \mathcal{D}$. Olkoon $G_i \in \mathcal{D}$. Pitäisi osoittaa, että kaikki joukkojen G_i numeroituvat yhdisteet kuuluvat Dynkin-systeemiin. Olkoon $G_1^* = G_1$ ja

$$G_2^* = G_2 \setminus G_1 = G_2 \setminus (G_1 \cap G_2).$$

Tällöin Lemman 5.1.2 nojalla $G_2^* \in \mathcal{D}$ ja lisäksi $G_1 \cup G_2 = G_1^* \cup G_2^* \in \mathcal{D}$.

Edelleen määrittelemme

$$G_n^* = G_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} G_i^*.$$

Koska joukot G_n^* ovat pistevieraita, niin Lemman 5.1.2 ja ehdon (3) nojalla induktiivisesti voimme osoitaa, että $G_n^* \in \mathcal{D}$. Edelleen ehdon (3) perusteella

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n^* \in \mathcal{D}.$$

Siis $\mathcal{D}$ on tällöin σ-algebra. $\square$

Lause 5.1.4 *Olkoon X joukko. Jos $\mathcal{E}$ on joukko joukon X osajoukkoja ja $A \cap B \subset \mathcal{E}$ jokaiselle joukolle $A, B \in \mathcal{E}$, niin pienin Dynkin-systeemi, joka sisältää joukon $\mathcal{E}$ on sama kuin pienin σ-algebra, joka sisältää joukon $\mathcal{E}$.*

Todistus. Olkoon $\delta(\mathcal{E})$ pienin Dynkin-systeemi, joka sisältää joukon $\mathcal{E}$, ja vastaavasti $\sigma(\mathcal{E})$ pienin σ-algebra, joka sisältää joukon $\mathcal{E}$. Tällöin siis voimme kirjoittaa väitteen muotoon

$$\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}).$$

Osoitetaan, että jos $A, B \in \delta(\mathcal{E})$, niin $A \cap B \in \delta(\mathcal{E})$. Tällöin Lauseen 5.1.3 nojalla $\delta(\mathcal{E})$ on σ-algebra. Koska $\sigma(\mathcal{E})$ on myös Dynkin-systeemi, niin saamme väitteen.

Olkoon $E \in \delta(\mathcal{E})$. Merkitsemme

$$\mathcal{D}_E = \{\, Q \in \delta(\mathcal{E}) \,|\, Q \cap E \in \delta(\mathcal{E})\}.$$

Tällöin $\mathcal{D}_E$ on Dynkin-systeemi, sillä

1. $X \in \mathcal{D}_E$, sillä
$$X \cap E = E \in \mathcal{E} \subset \delta(\mathcal{E}).$$

2. Jos $F \in \mathcal{D}_E$, niin $F \cap E \in \delta(\mathcal{E})$ ja siten Lemman 5.1.2 nojalla
$$(X \setminus F) \cap E = E \setminus F = E \setminus (F \cap E) \in \delta(\mathcal{E}).$$

3. Jos joukot $F_i \in \mathcal{D}_E$ ovat pistevieraita kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin
$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right) \cap E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (F_i \cap E) \in \delta(\mathcal{E}),$$
sillä $F_i \cap E \in \delta(\mathcal{E})$ ja $\delta(\mathcal{E})$ on Dynkin-systeemi.

Jos $E \in \mathcal{E}$, niin $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E$. Koska $\delta\,(\mathcal{E})$ on pienin joukon $\mathcal{E}$ sisältävä Dynkin-systeemi, niin

$$\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E \subset \delta(\mathcal{E})$$

jokaiselle $E \in \mathcal{E}$. Näin ollen $F \cap E \in \delta(\mathcal{E})$ jokaiselle $F \in \delta(\mathcal{E})$. Siis $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E \subset \delta(\mathcal{E})$ jokaiselle $E \in \delta(\mathcal{E})$. Tästä seuraa $\delta(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_E$ jokaiselle $E \in \delta(\mathcal{E})$. Siis $F \cap E \in \delta(\mathcal{E})$ jokaiselle $F, E \in \delta(\mathcal{E})$ ja Lauseen 5.1.3 nojalla $\delta(\mathcal{E})$ on σ-algebra, joten $\sigma(\mathcal{E}) \subset \delta(\mathcal{E})$. Toisaalta jokainen σ-algebra on myös Dynkin-systeemi, joten

$$\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$$

ja väite on siten todistettu. $\square$

Tulomitan yksikäsitteisyyden todistamiseksi esitämme seuravan tuloksen.

Lause 5.1.5 *Olkoon $\mathcal{E}$ perhe joukon X osajoukko. Oleteamme, että $A \cap B \in \mathcal{E}$ jokaiselle $A, B \in \mathcal{E}$ ja että perheessä $\mathcal{E}$ on olemassa joukot $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, joille pätee*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X.$$

Olkoon $\mathcal{A}$ joukon $\mathcal{E}$ sisältävä pienin σ-algebra. Jos μ_1 ja μ_2 ovat mittoja σ-algebrassa $\mathcal{A}$ siten, että

(1) $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ *kaikilla* $E \in \mathcal{E}$,

(2) $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$ *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$,

niin $\mu_1 = \mu_2$.

Todistus. Olkoon $E \in \mathcal{E}$ ja $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$. Merkitsemme

$$\mathcal{D}_E = \{D \in \mathcal{A} \mid \mu_2(E \cap D) = \mu_1(E \cap D)\}.$$

Osoitamme seuraavaksi, että $\mathcal{D}_E$ on Dynkin-systeemi:

1. $X \in \mathcal{D}_E$, sillä

$$\mu_1(E \cap X) = \mu_1(E) = \mu_2(E) = \mu_2(E \cap X).$$

2. Jos $D \in \mathcal{D}_E$, niin tällöin

$$\begin{aligned}\mu_1((X \setminus D) \cap E) &= \mu_1(E \setminus (D \cap E)) = \mu_1(E) - \mu_1(D \cap E) \\ &= \mu_2(E) - \mu_2(D \cap E) = \mu_2((X \setminus D) \cap E).\end{aligned}$$

Siis $X \setminus D \in \mathcal{D}_E$.

3. Olkoot joukot $D_i \in \mathcal{D}_E$ pistevieraita, kun $i \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mu_1\left(E \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i\right)\right) &= \mu_1\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (E \cap D_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(E \cap D_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2(E \cap D_i) = \mu_2\left(E \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i\right)\right).\end{aligned}$$

Siis saamme

$$\bigcup_{I\in\mathbb{N}} D_i \in \mathcal{D}_E.$$

Näin ollen $\mathcal{D}_E$ on Dynkin-systeemi. Toisaalta $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E$, sillä

$$\mu_1(E \cap F) = \mu_2(E \cap F)$$

kaikilla $F \in \mathcal{E}$. Siis Lauseen 5.1.4 mukaan

$$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E \subset \mathcal{A}.$$

Näin ollen

$$\mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)$$

kaikilla $A \in \mathcal{A}$, mikäli $E \in \mathcal{E}$ ja $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$. Siis pätee $\mu_1(A \cap E_n) = \mu_2(A \cap E_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $A \in \mathcal{A}$.

Olkoon

$$F_n = E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $F_n \in \mathcal{A}$ ja $A \cap F_n \in \mathcal{A}$, mistä seuraa

$$\mu_1(A \cap F_n) = \mu_1(A \cap F_n \cap E_n) = \mu_2(A \cap F_n \cap E_n) = \mu_2(A \cap F_n)$$

kaikilla $A \in \mathcal{A}$. Joukot F_n ovat pistevieraita ja

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_n = X.$$

Siis

$$\begin{aligned}
\mu_1(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A \cap F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A \cap F_n) \\
&= \mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap F_n)\right) = \mu_2(A)
\end{aligned}$$

kaikilla $A \in \mathcal{A}$. Siis $\mu_1 = \mu_2$. $\square$

5.2 Tulomitta

Olkoot $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mitta-avaruuksia. Pyrimme löytämään mitan λ tuloavaruudessa $X \times Y$ siten, että

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \tag{5.1}$$

jokaiselle $A \in \mathcal{A}$ ja $B \in \mathcal{B}$. Tarkastelemme ensin, mikä on luonnollinen σ-algebra, jossa tulomitta voidaan määritellä.

Merkitsemme seuraavalla tavalla kaksiulotteisen tulojoukon $E \subset X \times Y$ poikkileikkausia:

$$\begin{aligned} E_x = &\ \{\, y \mid (x,y) \in E\}, \\ E^y = &\ \{\, x \mid (x,y) \in E\}. \end{aligned}$$

Näille on helposti nähtävissä seuraavat ominaisuudet:

Lemma 5.2.1 *Olkoon $X \times Y$ avaruus ja $E \subset X \times Y$. Tällöin*

(a) $((X \times Y) \setminus E)_x = Y \setminus E_x$,

(b) $(\bigcup_i E_i)_x = \bigcup_i (E_i)_x$,

(c) $(\bigcap_i E_i)_x = \bigcap_i (E_i)_x$.

Todistus. Sivuutamme helppona. $\square$

Lemma 5.2.2 *Olkoot $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mitta-avaruuksia. Olkoon $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ joukon*

$$\{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$$

generoima pienin σ-algebra. Tällöin, jos $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, niin

$$E_x \in \mathcal{B} \quad \text{ja} \quad E^y \in \mathcal{A}.$$

Todistus. Olkoon

$$\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid E_x \in \mathcal{B}\}.$$

Osoitamme, että $\mathcal{D}$ on Dynkin-systeemi.

Olkoon

$$\mathcal{E} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}.$$

Tällöin selvästikin

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{E}$$

jokaisella $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ja $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Siis, jos osoitamme, että $\mathcal{D}$ on Dynkin-systeemi, niin Lauseen 5.1.4 nojalla

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}.$$

Käymme läpi Dynkin-systeemin ehdot: