jokaiselle $A \in \mathcal{A}$ ja $B \in \mathcal{B}$. Tarkastelemme ensin, mikä on luonnollinen σ-algebra, jossa tulomitta voidaan määritellä.

Merkitsemme seuraavalla tavalla kaksiulotteisen tulojoukon $E \subset X \times Y$ poikkileikkausia:

$$\begin{aligned} E_x = & \ \{ y \mid (x,y) \in E\}, \\ E^y = & \ \{ x \mid (x,y) \in E\}. \end{aligned}$$

Näille on helposti nähtävissä seuraavat ominaisuudet:

Lemma 5.2.1 *Olkoon $X \times Y$ avaruus ja $E \subset X \times Y$. Tällöin*

(a) $((X \times Y) \setminus E)_x = Y \setminus E_x$,

(b) $(\bigcup_i E_i)_x = \bigcup_i (E_i)_x$,

(c) $(\bigcap_i E_i)_x = \bigcap_i (E_i)_x$.

Todistus. Sivuutamme helppona. $\square$

Lemma 5.2.2 *Olkoot $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mitta-avaruuksia. Olkoon $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ joukon*

$$\{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$$

generoima pienin σ-algebra. Tällöin, jos $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, niin

$$E_x \in \mathcal{B} \quad ja \quad E^y \in \mathcal{A}.$$

Todistus. Olkoon

$$\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid E_x \in \mathcal{B}\}.$$

Osoitamme, että $\mathcal{D}$ on Dynkin-systeemi.

Olkoon

$$\mathcal{E} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}.$$

Tällöin selvästikin

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{E}$$

jokaisella $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ja $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Siis, jos osoitamme, että $\mathcal{D}$ on Dynkin-systeemi, niin Lauseen 5.1.4 nojalla

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}.$$

Käymme läpi Dynkin-systeemin ehdot:

1. $X \times Y \in \mathcal{D}$, sillä
$$(X \times Y)_x = Y \in \mathcal{B}.$$

2. Olkoon $E \in \mathcal{D}$. Tällöin Lemman 5.2.1 nojalla
$$((X \times Y) \setminus E)_x = Y \setminus E_x \in \mathcal{B}.$$

 Olkoot joukot $E_i \in \mathcal{D}$ pistevieraita. Tällöin
$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right)_x = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (E_i)_x \in \mathcal{B}.$$

Siten $\mathcal{D}$ on Dynkin-systeemi. Tällöin ehdosta $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ seuraa, että
$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}.$$

Tällöin, kun $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, niin pätee $E_x \in \mathcal{B}$. Aivan vastaavasti saamme $E^y \in \mathcal{A}$. $\square$

Huomattakoon, että joukko E_x ei ole välttämättä mitallinen, jos tarkastellaan mielivaltaista σ-algebraa, joka sisältää joukot $A \times B$.

Jos valitaan $\mathcal{B}$ reaalilukujen joukon Borelin joukkojen luokaksi, niin σ-algebra $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ on joukon $\mathbb{R}^2$ Borelin joukot. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Yleisesti joukossa $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ei voida määritellä yksikäsitteistä mittaa, jolle ehto (5.1) on voimassa. Kun oletamme mitta-avaruudet σ-äärellisiksi, niin saamme yksikäsitteisen ehdon (5.1) toteuttavan mitan.

Lause 5.2.3 *Olkoot $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-äärellisiä mitta-avaruuksia. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen mitta λ joukossa $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ siten, että*
$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$
jokaiselle $A \in \mathcal{A}$ ja $B \in \mathcal{B}$, kun määrittelemme $0 \cdot \infty = 0$ ja $\infty \cdot \infty = \infty$. Lisäksi jokaiselle joukolle $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ pätee
$$\lambda(E) = \int \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int \mu(E^y)\, d\nu(y),$$
missä merkintä $d\mu\,(x)$ (vastaavasti $d\nu\,(y)$) korostaa, että integroitava funktio riippuu muuttujasta $x \in X$ (vastaavasti $y \in Y$).

Tämän lauseen todistamiseksi tarkastelemme ensiksi seuraavaa lemmaa:

Lemma 5.2.4 *Olkoot* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ja* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ*-äärellisiä mitta-avaruuksia ja* $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. *Tällöin funktiot*

$$x \to \nu(E_x) \quad ja \quad y \to \mu(E^y)$$

ovat mitallisia σ*-algebroissa* $\mathcal{A}$ *ja* $\mathcal{B}$.

Todistus. Merkitsemme

$$s_E(x) = \nu(E_x).$$

Oletamme aluksi, että $\nu(Y) < \infty$. Määrittelemme joukon $\mathcal{D}$ seuraavasti:

$$\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \,|\, s_E \text{ on mitallinen joukossa } \mathcal{A}\}.$$

Tällöin $\mathcal{D} \neq \emptyset$, sillä funktio

$$s_{X \times Y}(x) = \nu((X \times Y)_x) = \nu(Y) = \text{vakio}$$

on mitallinen ja siis $X \times Y \in \mathcal{D}$.

Jos $E \in \mathcal{D}$, niin

$$s_{(X \times Y) \setminus E}(x) = \nu(((X \times Y) \setminus E)_x) = \nu(Y \setminus E_x) = \nu(Y) - \nu(E_x).$$

Koska $E \in \mathcal{D}$, niin s_E on mitallinen. Siten edellisen perusteella myös $s_{(X \times Y) \setminus E}$ on mitallinen.

Olkoot joukot E_i pistevieraita ja funtiot s_{E_i} mitallisia. Tällöin

$$\begin{aligned} s_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i}(x) &= \nu\left(\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right)_x\right) = \nu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (E_i)_x\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \nu((E_i)_x) = \sum_{i=1}^{\infty} s_{E_i}(x). \end{aligned}$$

Siten $\bigcup_i E_i \in \mathcal{D}$, kun joukot E_i ovat pistevieraita jokaiselle $i \in \mathbb{N}$. Näin ollen $\mathcal{D}$ on Dynkin-systeemi. Koska

$$s_{A \times B}(x) = \nu(A \times B)_x$$

ja

$$(A \times B)_x = \begin{cases} \emptyset, & x \notin A, \\ B, & x \in A, \end{cases}$$

niin

$$s_{A\times B}(x) = \begin{cases} \nu(\emptyset) = 0, & x \notin A, \\ \nu(B), & x \in A, \end{cases}$$

eli

$$s_{A\times B}(x) = \nu(B)\chi_A.$$

Siis $s_{A\times B}$ on mitallinen σ-algebrassa $\mathcal{A}$. Merkitsemme

$$\mathcal{E} = \{A \times B \mid \ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}.$$

Koska

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \in \mathcal{E}$$

kun $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ja $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, niin Lauseen 5.1.4 perusteella

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}.$$

Koska

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B},$$

niin

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{D}$$

ja väite on voimassa, kun $\nu(Y) < \infty$.

Oletetaan, että ν on σ-äärellinen ja siis on olemassa joukot Y_i, joille pätee

$$Y = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Y_i,\ \ \nu(Y_i) < \infty.$$

Voimme olettaa, että joukot Y_i ovat pistevieraita. Määritellään äärelliset mitat ν_n asettamalla

$$\nu_n\left(A\right) = \nu\left(A \cap Y_n\right), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Siis

$$\nu(E_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(E_x).$$

Näin ollen $\nu(E_x)$ on mitallinen. $\square$

Nyt voimmekin sitten todistaa Lauseen 5.2.3.

Todistus. Määritellään kuvaukset $\lambda_1 : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to [0,\infty]$ ja $\lambda_2 : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to [0,\infty]$ asettamalla

$$\lambda_1(E) = \int \nu(E_x)\, d\mu\,(x) \qquad \text{ja} \qquad \lambda_2(E) = \int \mu(E^y)\, d\nu\,(y)\,.$$

Tällöin λ_1 ja λ_2 ovat mittoja σ-algebrassa $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$, missä

$$\mathcal{E} = \{\ A \times B \mid\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}\,.$$

Nimittäin $\lambda_1(\emptyset) = \lambda_2(\emptyset) = 0$. Edelleen, jos joukot E_i ovat pistevieraita, niin Monotonisen konvergenssilauseen 3.1.7 avulla saamme

$$\begin{aligned}\lambda_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \int \nu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)_x\right) d\mu\,(x) = \int \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i)_x\right) d\mu\,(x) \\ &= \int \sum_{i=1}^{\infty} \nu((E_i)_x) d\mu\,(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int \nu((E_i)_x) d\mu\,(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1(E_i).\end{aligned}$$

Siis kuvaukset λ_1 ja λ_2 ovat mittoja.

Olkoon $E = A \times B \in \mathcal{E}$. Tällöin

$$\lambda_1(E) = \int \nu(E_x)\, d\mu\,(x)$$

missä

$$E_x = \begin{cases} \emptyset, & x \notin A, \\ B, & x \in A. \end{cases}$$

Näin ollen

$$\int \nu(E_x)\, d\mu\,(x) = \int \nu(B)\chi_A\,(x)\ d\mu\,(x) = \nu(B)\mu(A).$$

Aivan vastaavasti saamme

$$\int \mu(E^y)\, d\nu = \nu(B)\mu(A).$$

Siten $\lambda_1(E) = \lambda_2(E)$ kaikilla $E \in \mathcal{E}$ ja lisäksi jos $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, niin $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}$. Koska mitta-avaruudet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ ovat σ-äärellisiä, niin on olemassa äärellismittaiset joukot $X_n \in \mathcal{A}$ ja $Y_n \in \mathcal{B}$, joille pätee $X_n \subset X_{n+1}$ ja $Y_n \subset Y_{n+1}$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ sekä

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = Y.$$

Tällöin $E_n = X_n \times Y_n \in \mathcal{E}$ ja

$$\lambda_1(E_n) = \lambda_2(E_n) = \mu(X_n)\nu(Y_n) < \infty$$

sekä

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \times Y_n = X \times Y.$$

Siten edellisen kappaleen yksikäsitteisyyslauseen oletukset ovat voimassa, joten $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

Määritelmä 5.2.5 *Oletetaan, että mitta-avaruudet*$(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ja* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *ovat* σ*-äärellisiä. Tulomitta* $\mu \times \nu$ *on pienimmässä joukot* $A \times B$ *sisältävässä* σ*-algebrassa* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *määritelty mitta, joka toteuttaa ehdon*

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$$

jokaiselle $A \in \mathcal{A}$ *ja* $B \in \mathcal{B}$.

Lause 5.2.6 (TONELLI) *Olkoot* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ja* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *mitta-avaruuksia, jotka ovat* σ*-äärellisiä. Olkoon funktio* $f : X \times Y \to [0, \infty]$ *mitallinen funktio mitta-avaruudessa* $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$*. Tällöin* $f_x(y) = f(x, y)$ *on mitallinen avaruudessa* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *ja* $f^y(x) = f(x, y)$ *on mitallinen avaruudessa* $(X, \mathcal{A}, \mu)$*. Edelleen*

$$\int f\, d(\mu \times \nu) = \int \left(\int f_x d\nu \right) d\mu = \int \left(\int f^y d\mu \right) d\nu.$$

Todistus. Oletamme, että $f : X \times Y \to [0, \infty]$ on mitallinen. Tällöin on olemassa kasvava jono yksinkertaisia funktioita s_n siten, että $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$. Merkitsemme

$$s_n = \sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_{in} \chi_{E_{in}},$$

missä $\alpha_{in} \geq 0$ ja joukot E_{in} ovat pistevieraita. Tällöin

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(s_n)_x = f_x \quad \text{ja} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}}(s_n)^y = f^y.$$

Siis f_x ja f^y ovat mitallisia. Lisäksi pätee

$$\begin{aligned}\int s_n\, d(\mu\times\nu) &= \sum_{i=1}^{k(n)}\alpha_{in}\int\chi_{E_{in}}d(\mu\times\nu) = \sum_{i=1}^{k(n)}\alpha_{in}\int\nu((E_{in})_x)\,d\mu \\ &= \int\sum_{i=1}^{k(n)}\alpha_{in}\nu((E_{in})_x)\,d\mu = \int\left(\int(s_n)_x d\nu\right)d\mu.\end{aligned}$$

Aivan vastaavasti saamme

$$\int s_n\, d(\mu\times\nu) = \int\left(\int(s_n)_x\, d\mu\right)d\nu.$$

Monotonisen konvergenssilauseen 3.1.7 nojalla pätee

$$\begin{aligned}\int f\, d(\mu\times\nu) &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\int s_n\, d(\mu\times\nu) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int\left(\int(s_n)_x\, d\nu\right)d\mu \\ &= \int\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\int(s_n)_x\, d\nu\right)d\mu = \int\int(\sup_{n\in\mathbb{N}}(s_n)_x\, d\nu)\,d\mu \\ &= \int\left(\int f_x\, d\nu\right)d\mu.\end{aligned}$$

Aivan vastaavasti voimme osoittaa, että

$$\int f\, d(\mu\times\nu) = \int\left(\int f^y d\nu\right)d\mu$$

joten olemme todistaneet Tonellin lauseen. □

Edellisestä lauseesta seuraa, että funktioit f_x ja g^y ovat mitallisia, kun positiivinen funktio f on mitallinen tuloavaruudessa $X\times Y$. Sama tulos pätee yleisestikin tuloavaruuden mitalliselle funktiolle.

Lemma 5.2.7 *Jos f on mitallinen σ-algebrassa $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, niin f_x on mitallinen σ-algebrassa $\mathcal{B}$ ja f^y on mitallinen σ-algebrassa $\mathcal{A}$.*

Todistus. Olkoon $x\in X$. Osoitamme, että

$$(f_x)^{-1}(]a,\infty]) = \left(f^{-1}]a,\infty]\right)_x.$$

Oletamme, että $t\in(f_x)^{-1}(]a,\infty])$. Tällöin $f_x(t) = f(x,t)$. Siis

$$(x,t)\in f^{-1}(]a,\infty]) \Rightarrow t\in\left(f^{-1}]a,\infty]\right)_x.$$

Vastaavasti ehdosta $t\in(f^{-1}]a,\infty])_x$ seuraa, että $t\in(f_x)^{-1}(]a,\infty])$. Koska kuvaus $f^{-1}(]a,\infty])$ on mitallinen σ-algebrassa $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, niin Lemman 5.2.2 nojalla funktio f_x on mitallinen. □

Lause 5.2.8 (FUBINI) *Oletetaan, että mitta-avaruudet* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ja* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *ovat* σ*-äärellisiä. Olkoon lisäksi funktio* $f: X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *integroituva tulomitan* $\mu \times \nu$ *suhteen. Tällöin seuraavat väitteet ovat voimassa:*

(a) *funktio* f_x *on integroituva mitan* ν *suhteen* μ*-melkein kaikkialla ,*

(b) μ*-melkein kaikkialla määritelty funktio* $x \to \int f_x d\nu$ *integroituva mitan* μ *suhteen,*

(c) *funktio* f^y *on integroituva mitan* μ *suhteen* ν*-melkein kaikkialla,*

(d) ν*-melkein kaikkialla määritelty funktio* $y \to \int f^y d\mu$ *integroituva mitan* ν *suhteen*

Lisäksi pätee yhtälö

$$\int f \; d(\mu \times \nu) = \int \left(\int f_x \, d\nu \,(y) \right) d\mu \,(x) = \int \left(\int f^y \, d\mu \,(x) \right) d\nu \,(y) \,.$$

Todistus. On helppo huomata, että $|f|_x = |f_x|$, $|f|^y = |f^y|$, $(f^+)_x = (f_x)^+$, $(f^-)_x = (f_x)^-$, $(f^+)^y = (f^y)^+$, $(f^-)^y = (f^y)^-$, $(f+g)_x = f_x + g_x$ ja $(f+g)^y = f^y + g^y$. Siis Tonellin lauseen nojalla

$$\begin{aligned} \infty > \int f^+ d(\mu \times \nu) &= \int \left(\int (f^+)_x d\nu \right) d\mu, \\ \infty > \int f^- d(\mu \times \nu) &= \int \left(\int (f^-)_x d\nu \right) d\mu. \end{aligned}$$

Täten kuvaukset $x \to \int (f^+)_x d\nu$ ja $x \to \int (f^-)_x d\nu$ ovat μ-integroituvia.

Jos $f_x = (f^+)_x - (f^-)_x$ ei ole ν-integroituva, niin $\int (f^+)_x d\nu = \infty$ tai $\int (f^-)_x d\nu = \infty$. Merkitään

$$A_1 = \left\{ x \mid \int (f^+)_x d\nu = \infty \right\} \quad \text{ja} \quad A_2 = \left\{ x \mid \int (f^-)_x d\nu = \infty \right\}.$$

Koska kuvaukset $x \to \int (f^+)_x \, d\nu$ ja $x \to \int (f^-)_x \, d\nu$ ovat μ-integroituvia, niin $\mu(A_1) = \mu(A_2) = 0$. Joukossa $X \setminus (A_1 \cup A_2)$ pätee

$$\int (f^+)_x \, d\nu < \infty \quad \text{ja} \quad \int (f^-)_x \, d\nu < \infty.$$

Siis joukossa $X \setminus (A_1 \cup A_2)$ ovat funktiot $(f^+)_x$ ja $(f^-)_x$ ν-integroituvia, joten $f_x = (f^+)_x - (f^-)_x$ on ν-integroituva μ-melkein kaikkialla. Edelleen funktio $x \to \int f_x d\nu$ on määritelty joukossa $X \setminus (A_1 \cap A_2)$, joten se määritelty μ-melkein kaikkialla ja integroituva mitan ν suhteen. Vastaavasti f^y on integroituva mitan μ suhteen ν-melkein kaikkialla . Lisäksi funktio $y \to \int f^y d\mu$ on määritelty ν-melkein kaikkialla ja integroituva mitan ν suhteen.

Lopuksi toteamme, että

$$\begin{aligned}
\int f\, d(\mu \times \nu) &= \int f^+ d(\mu \times \nu) - \int f^- d(\mu \times \nu) = \\
&= \int_{X \setminus (A_1 \cap A_2)} f^+ d(\mu \times \nu) - \int_{X \setminus (A_1 \cap A_2)} f^- d(\mu \times \nu) \\
&= \int \left(\int ((f^+)_x - (f^-)_x) d\nu\,(y) \right) d\mu\,(x) = \int \left(\int f_x d\nu\,(y) \right) d\mu\,(x)\,.
\end{aligned}$$

Siis olemme todistaneet Fubinin lauseen. $\square$

Tonellin lauseessa mitta-avaruuden σ-äärellisyys ja funktion f ei-negatiivisuus ovat tärkeitä. Samoin Fubinin lauseessa tarvitsemme funktion f integroituvuutta.

Mitta-avaruus $(X \times Y, A \otimes B, \mu \times \nu)$ ei ole välttämättä täydellinen, vaikka mitta-avaruudet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ olisivat täydellisiä. Siis jos $F \subset A$ ja $\mu \times \nu\,(A) = 0$, niin joukko F ei ole välttämättä mitallinen. Tulomitta-avaruuden $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$, joka ei ole täydellinen, saamme, kun $X = Y = \mathbb{R}$ ja $\mu = \nu = m$ =Lebesguen mitta. Nimittäin olkoon A ei-mitallinen joukko ja B nollamittainen joukko. Tällöin $A \times B$ ei ole $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mitallinen. Jos $A \times B$ olisi mitallinen, niin $(A \times B)^y$ olisi $\mathcal{A}$-mitallinen kaikilla $y \in Y$. Tällöin jos $y \in B$, niin $A = (A \times B)^y$ on mitallinen, missä on ristiriita. Joukko $A \times B$ on kylläkin tulomitan täydennyksen suhteen mitallinen, sillä $A \times B \subset X \times B$ ja

$$(\mu \otimes \nu)^*(X \times B) = (\mu \otimes \nu)(X \times B) = 0.$$

Tämän puutteen korjaamiseksi esitämme seuraavan tuloksen.

Lause 5.2.9 *Olkoot $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ täydellisiä mitta-avaruuksia. Olkoon mitta-avaruus $(X \times Y, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^*, (\mu \times \nu)^*)$ mitta-avaruuden $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ täydennys. Jos funktio $f \geq 0$ on $(\mu \otimes \nu)^*$-mitallinen, niin:*

(a) *Funktio f_x on $\mathcal{B}$-mitallinen melkein kaikkilla $x \in X$.*

(b) *Funktio f^y on A-mitallinen melkein kaikkilla $y \in Y$.*

(c) *Melkein kaikkialla määritelty funktio $x \to \int f_x d\nu\,(y)$ on $\mathcal{A}$-mitallinen.*

(d) *Melkein kaikkialla määritelty funktio* $y \to \int f^y d\mu(x)$ *on* $\mathcal{B}$*-mitallinen.*

(e)

$$\int f\, d(\mu \otimes \nu)^* = \int_X \left(\int_Y f_x\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f^y\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Tämän lauseen todistamiseksi tarvitsemme kaksi lemmaa:

Lemma 5.2.10 *Olkoon* $(Z, \mathcal{F}, \tau)$ *mitta-avaruus ja* $(Z,\ \mathcal{F}^*, \tau^*)$ *sen täydennys. Tällöin, jos funktio* f *on* τ^**-mitallinen, niin on olemassa* τ*-mitallinen funktio* g *ja joukko* $E \in \mathcal{F}$ *siten, että* $f = g$ *joukossa* $Z \backslash E$ *ja* $\tau(E) = 0$.

Todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Lemma 5.2.11 *Olkoot* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ja* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *täydellisiä* σ*-äärellisiä mitta-avaruuksia. Oletamme, että funktio* h *on* $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^*$*-mitallinen ja* $h = 0$ *jossakin joukossa* $(X \times Y) \backslash E$ *ja* $\mu \times \nu(E) = 0$. *Tällöin melkein kaikille* $x \in X$ *pätee* $h(x, y) = 0$ *melkein kaikkialla mitan* ν*-suhteen. Toisin sanoen melkein kaikille* x *ja* y *funktiot* h_x *ja* h^y *ovat mitallisia .*

Todistus. Merkitsemme

$$A = \ \{(x, y) \in X \times Y \ | \ h(x, y) \neq 0\}.$$

Tällöin $A \subset E$. Koska $\mu \times \nu(E) = 0$, niin

$$0 = (\mu \times \nu)(E) = \int \nu(E_x) d\mu.$$

Siis joukolle

$$N = \{\ x \in X \,|\, \nu(E_x) > 0\}$$

pätee $\mu(N) = 0$.

Olkoon $x \notin N$. Tällöin $\nu(E_x) = 0$ ja

$$A_x = \{y \in Y \,|\, h(x, y) \neq 0\} \subset E_x.$$

Koska mitta ν on täydellinen, niin joukko A_x on ν-mitallinen ja $\nu(A_x) = 0$. Siis $h(x, y) = 0$ melkein kaikkialla joukossa Y jokaiselle $x \notin N$. Koska mitta μ on täydellinen ja $\mu(N) = 0$, niin $h(x, y) = 0$ ν-melkein kaikkialla melkein jokaiselle $x \in X$. Siis melkein jokaiselle $x \in X$ funktio h_x on mitallinen, sillä nollafunktio on mitallinen ja $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ on täydellinen.

Vastaavasti voimme todistaa myös h^y mitallisuuden melkein kaikille $y \in Y$. $\square$

Nyt voimmekin kirjoittaa lauseen 5.2.9 todistuksen:

Todistus. Lemman 5.2.10 nojalla on olemassa $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mitallinen funktio g^* ja $f = g^*$ joukossa $(X \times Y) \setminus E$ ja $(\mu \times \nu)(E) = 0$. Määritellään funktiot g ja h asettamalla $g = g^* \chi_{(X \times Y) \setminus E}$ ja $h = f \chi_E$. Tällöin g on $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mitallinen ja h on $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^*$- mitallinen. Lisäksi on voimassa $f = g + h$. Siis saamme Lemman 5.2.11 nojalla

$$
\begin{aligned}
\textstyle\int f d(\mu \times \nu)^* &= = \int g\, d(\mu \times \nu)^* + \int h\, d(\mu \times \nu)^* \\
&= \int g\, d(\mu \times \nu) + \int_{(X \times Y) \setminus E} h d(\mu \times \nu)^* + \int_E h d(\mu \times \nu)^* \\
&= \int g d(\mu \times \nu) = \int \left(\int g_x d\nu\,(y) \right) d\mu\,(x) \\
&= \int \left(\int g_x d\nu\,(y) \right) d\mu\,(x) + \int \left(\int h_x d\nu\,(y) \right) d\mu\,(x) \\
&= \int \left(\int f_x d\nu\,(y) \right) d\mu\,(x)\,,
\end{aligned}
$$

joten olemme todistaneet Lauseen 5.2.9. $\square$

Jos haluaisimme laskea integraalin $\int \int f\, d(\mu \times \nu)$, niin on huomattava, että voi olla

$$\int f\, d(\mu \times \nu) \neq \int g d(\mu \times \nu)$$

vaikkakin $f = g$ joukossa $(X \times Y) \setminus (B \times C)$, missä $\mu(B) = 0$. Tämä siitä syystä, että funktio g ei välttämättä ole mitallinen σ-algebrassa $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Sen sijaan mitta-avaruuden $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ täydennyksessä $(X \times Y, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^*, (\mu \times \nu)^*)$ pätee, että $(\mu \times \nu)^*(B \times C) = 0$, mikäli $\mu(B) = 0$ ja $B \times C \subset B \times Y$. Nimittäin $(\mu \times \nu)(B \times Y) = \mu\,(B)\,\nu\,(Y) = 0$, kun mitat μ ja ν ovat σ-äärellisiä.

Seuraava tulos selvittää tarkemmin, mitä mitta-avaruuden σ-äärellisuus tarkoittaa.

Lause 5.2.12 *Olkoon $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mitta-avaruus. Tällöin se on σ-äärellinen, jos ja vain jos on olemassa integroituva funktio h siten, että $h \neq 0$ melkein kaikkialla.*

Todistus. Oletamme, että on olemassa integroituva funktio h siten, että $h \neq 0$ melkein kaikkialla. Funktio h on äärellinen melkein kaikkialla integroituvana funktiona. Tällöin joukolle

$$X_n = \{x \mid |h(x)| \geq \frac{1}{n}\}$$

pätee $\mu(X_n) < \infty$, sillä

$$\infty > \int |h| \, d\mu \geq \int \left| h\chi_{X_n} \right| d\mu \geq \int \frac{1}{n} \chi_{X_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(X_n).$$

Koska

$$X = \{h(x) = 0\} \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \right),$$

niin X on σ-äärellinen.

Seuraavaksi oletamme, että X on σ-äärellinen ja siis

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

missä $\mu(X_n) < \infty$. Voimme valita joukot X_n pistevieraiksi. Määrittelemme funktion h asettamalla

$$h(x) = \begin{cases} \left(2^n \mu(X_n)\right)^{-1}, & \text{kun } x \in X_n \text{ ja } \mu(X_n) > 0, \\ 1, & \text{kun } x \in X_n \text{ ja } \mu(X_n) = 0. \end{cases}$$

Koska joukot X_n ovat pistevieraita, niin $0 < h(x) < \infty$ ja h on mitallinen, sillä

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in X_n \text{ ja } \mu(X_n) = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^n \mu(X_n)\right)^{-1} \chi_{X_n}(x), & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Lisäksi pätee

$$\int h d\mu = \int_{\bigcup X_n} h \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} h d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

ja siten h on integroituva. $\square$

Lause 5.2.13 *Oletetamme, että mitta-avaruudet* $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ *ovat* σ*-äärellisiä, kun* $i = 1, ..., n$*. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen mitta* τ σ*-algebrassa*

$$(((\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3) \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n)$$

siten, että

$$\tau(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \cdots \mu_n(A_n)$$

jokaiselle joukolle $A_i \in \mathcal{A}_i$*. Edelleen pätee, että*

$$(((\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3) \otimes \ldots) \otimes \mathcal{A}_n$$

on sama kuin pienin σ*-algebra, joka sisältää joukot* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$*, missä* $A_i \in \mathcal{A}_i$ *kaikilla* $1 \leq i \leq n$*.*

Todistus. Todistamme tämän induktiolla: Tapauksessa $n = 2$ väite on todistettu.

Oletamme seuraavaksi, että väite on voimassa, kun $n = k$. Tällöin

$$\tau_{k+1} = \tau_k \times \mu_{k+1}$$

missä τ_{k+1} on mitta avaruudessa

$$((\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \ldots \otimes \mathcal{A}_k) \otimes \mathcal{A}_{k+1}$$

ja τ_k on mitta tuloavaruudessa $((\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \ldots) \otimes \mathcal{A}_k$. Tällöin

$$\tau_{k+1}(Q \times A_{k+1}) = \tau_k(Q)\mu_{k+1}(A_{k+1})$$

tulomitan määritelmän nojalla jokaiselle $Q \in ((\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_k)$. Koska

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \in ((\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \ldots) \otimes \mathcal{A}_k,$$

niin

$$\begin{aligned} \tau_{k+1}(((A_1 \times A_2) \times \ldots \times A_k) \times A_{k+1}) &= \tau_k(A_1 \times \ldots \times A_k)\mu_{k+1}(A_{k+1}) \\ &= \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \cdots \mu_k(A_k)\mu_{k+1}(A_{k+1}) \end{aligned}$$

joten induktioväite pätee.

Todistamme myös toisen väitteen induktiolla. Merkitsemme, että $\mathcal{B}_n$ on pienin σ-algebra, joka sisältää joukot

$$\mathcal{E}_n = \{\ A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n\ |A_i \in \mathcal{A}_i\}$$

Väite on tosi, kun $n = 2$ eli $\mathcal{B}_2 = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Oletemme, että $\mathcal{B}_k = (((\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3) \ldots \otimes \mathcal{A}_k)$. Koska $\mathcal{E}_{k+1} \subset (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \ldots \mathcal{A}_{k+1}$, niin $\mathcal{B}_{k+1} \subset (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \ldots \otimes \mathcal{A}_{k+1}$. Merkitsemme

$$\mathcal{F} = \{\ E \in ((\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \ldots) \otimes \mathcal{A}_k \,|\, E \times A_{k+1} \in \mathcal{B}_{k+1}\}.$$

Selvästi $\mathcal{F}$ on σ-algebra ja $\mathcal{E}_k \subset \mathcal{F}$. Siis

$$((\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \ldots) \otimes \mathcal{A}_k = \mathcal{B}_k \subset \mathcal{F}$$

Koska

$$\mathcal{F} \subset ((\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \ldots) \otimes \mathcal{A}_k = \mathcal{B}_k,$$

niin $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \ldots \otimes \mathcal{A}_k$. Siis $Q \times A_{k+1} \in \mathcal{B}_{k+1}$ jokaiselle $Q \in (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \ldots \otimes \mathcal{A}_k$. Näin ollen tulomitan määritelmän nojalla

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \ldots \otimes \mathcal{A}_{k+1} \subset \mathcal{B}_{k+1}.$$

Siis

$$\mathcal{B}_{k+1} = (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \ldots \otimes \mathcal{A}_{k+1}$$

Näin ollen toinenkin väite on voimassa.

Olkoon $\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_k$ pienin σ-algebra, joka sisältää joukot $A_1 \times ... \times A_k$. Aivan vastaavasti voisimme osoittaa, että

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_r) \otimes (\mathcal{A}_{r+1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_{r+k}) = \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_{r+k}.$$

$\square$

Määritelmä 5.2.14 *Olkoon $X = \mathbb{R}$ ja m_1 Lebesguen mitta $\mathbb{R}$:ssä. Mitta-avaruuden $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M} \otimes \mathcal{M} \otimes ... \otimes \mathcal{M}, m_1 \times ... \times m_1)$ täydennystä sanotaan n-ulotteiseksi Lebesguen mitta-avaruudeksi ja vastaavaa mittaa merkitään m_n.*

Vastaaavasti kuin reaalilukujen joukosssa voimme todistaa, että jos $f \geq 0$ on Riemann-integroituva joukossa $\mathbb{R}^n$, niin

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = \int f\,dm_n.$$

Edelleen jos $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ on m_n-mitallinen, niin Lausee 5.2.9 nojalla

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dm_n = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f\,dm_k \right) dm_{n-k} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} ... \left(\int_{\mathbb{R}} f\,dm_1 \right) dm_1 \right).$$

Muuttujan vaihdolle Lebesguen integraalin tapauksessa voidaan todistaa vastaavia tuloksia kuin Riemann integraalille.

Lause 5.2.15 *Olkoon $B \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $g : B \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva, joka toteuttaa ehdot*

(1) *Jacobin determinantti $J_g(t) \neq 0$ jokaiselle $t \in B$,*

(2) *$g : B \to g(B)$ on bijektio.*

Jos $f : g(B) \to [0, \infty]$ on mitallinen, niin

$$\int_{g(B)} f \; dm_n = \int_B f(g(t)) \, |J_g(t)| \, dm_n(t).$$

Todistus. Emme todista lausetta yksityiskohtaisesti. Tarkemman todistuksen voi löytää esim. Rudin, Luku 7.22. Annamme vain pääkohdat. Lauseen 3.4.1 saamme

$$\int_{g(B)} f \; dm_n = \int_B f \circ g \, d\mu,$$

missä $\mu = m_n \circ g$. Siis

$$\mu(E) = \int_{g(E)} dm_n.$$

Lineaarikuvausten avulla voimme todistaa, että

$$\mu(E) = \int_E |J_g(t)| \; dm_n.$$

Tällöin väite

$$\int f \, dm_n = \int f(g(t)) \, |J_g(t)| \; dm_n,$$

pätee ensin yksinkertaisille funktioille f ja Monotonisen konvergenssilauseen nojalla kaikille ei-negatiivisille mitallisille funktioille f.

Luku 6

Rieszin esityslause

6.1 Radonin mitta ja Rieszin esityslause

Olkoon X joukko. Palautamme mieleen, että joukkokokoelmaa $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ sanotaan *topologiaksi* joukossa X ja joukkoa X *topologiseksi avaruudeksi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) $\emptyset \in \tau$ ja $X \in \tau$,

(2) jos $A_i \in \tau$ jokaiselle $i = 1, ..., n$ ja $n \in \mathbf{N}$, niin $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$, ts. äärelliset perheen τ joukkojen leikkaukset kuuluvat joukkokoelmaan τ,

(3) jos I on mielivaltainen indeksijoukko ja $A_i \in \tau$ jokaiselle $i \in I$, niin $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$, ts. mielivaltaiset perheen τ joukkojen unionit kuuluvat joukkokoelmaan τ.

Topologian τ joukkoja sanotaan *avoimiksi*. Avointa joukkoa A sanotaan pisteen x *(avoimeksi) ympäristöksi*, jos $x \in A$. Joukko $B \subset X$ on *suljettu*, jos joukko $X \backslash B$ on avoin. Edelleen joukkoa B sanotaan *kompaktiksi,* jos jokaisella joukon B avoimella peitteellä on äärellinen osapeite, eli jos A_i ovat avoimia ja $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, niin joillekin indekseille $i_k \in I$, $k = 1, ..., n$, pätee $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k}$.

Topologista avaruutta (X, τ) sanotaan *Hausdorff avaruudeksi*, jos kaikille joukon X pisteille x ja y on olemassa erilliset ympäristöt. Topologinen avaruus (X, τ) on *lokaalisti kompakti*, jos jokaiselle $x \in X$ on olemassa avoin ympäristö U, jonka sulkeuma $\overline{U}$ on kompakti.

Olkoon f jatkuva reaaliarvoinen kuvaus topologisessa avaruudessa X (eli jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin). Funktion f kantaja on

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Kompakti kantajaisten funktioiden joukkoa merkitsemme $\mathcal{K}(X)$. Käytämme myös merkintää

$$\mathcal{K}^+(X) = \{f \in \mathcal{K}(X) \mid f \geq 0\}.$$

Tarvitsemme seuraavaa tulosta.

Lemma 6.1.1 (URYSOHNIN LEMMA) *Olkoon X lokaalikompakti Hausdorff avaruus ja V avoin joukon X osajoukko. Jos K on kompakti joukkon V osajoukko, niin on olemassa kompaktikantajainen jatkuva funktio $f : X \to [0,1]$, joka toteuttaa ehdon* $\operatorname{supp} f \subset V$ *ja $f = 1$ joukossa K.*

Todistuksen sivuutamme (Katso Rudin s. 39). Urysohnin lemman avulla on helppo todistaa seuraavat topologisen tulokset.

Lemma 6.1.2 *Olkoon X lokaalisti kompakti Hausdorff avaruus ja K_1 ja K_2 kompakteja pistevieraita joukon X osajoukkoja. Tällöin on olemassa avoimet pistevieraat joukot U_1 ja U_2 siten, että $K_1 \subset U_1$ ja $K_2 \subset U_2$.*

Lemma 6.1.3 *Olkoon X lokaalisti kompakti Hausdorff avaruus ja $U \subset X$. Tällöin on olemassa ylöspäin suunnattu perhe $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ avoimia relatiivi kompakteja joukkoja siten, että $\overline{U_\alpha} \subset U$ ja $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = U$.*

Funktioita $f : X \to \left]-\infty, \infty\right]$ sanotaan *alaspäin puolijatkuvaksi,* jos jokaiselle $\alpha \in \mathbb{R}$ joukko $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ on avoin. Alaspäin puolijatkuvilla funktioilla on seuraavat ominaisuudet:

Lemma 6.1.4 *Olkoon X lokaalikompakti Hausdorff avaruus.*

(a) *Jos $f : X \to [0, \infty]$ on alaspäin puolijatkuva, niin*

$$f = \sup \{g \in \mathcal{K}(X) \mid g \leq f\}.$$

(b) (Dinin lause) *Olkoot f ja g positiivisia kompakti kantajaisia jatkuvia funktiota siten, että $g = 1$ funktion f kantajassa. Jos $(f_i)_{i \in I}$ on ylöspäin suunnattu (eli jokaiselle $\alpha, \beta \in I$ on olemassa $\gamma \in I$ siten, että $f_\gamma \geq f_\alpha$ ja $f_\gamma \geq f_\beta$) perhe alaspäin puolijatkuvia funktioita ja $f = \sup_{i \in I} f_i$, niin jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $f_{i(\epsilon)}$, joka toteuttaa ehdot $i(\epsilon) \in I$ ja $f \leq f_{i(\epsilon)} + \epsilon g$.*

Todistuksen jätämme harjoitustehtäväksi.

Määritelmä 6.1.5 *Kuvausta $I : \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ sanotaan Radonin mitaksi, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:*

(1) $I(f) \geq 0$ *jokaiselle* $f \in \mathcal{K}^+(X)$ *(positiivisuus),*

(2) $I(f+g) = I(f) + I(g)$ *jokaiselle* $f, g \in \mathcal{K}(X)$ *(additiivisuus),*

(3) $I(\alpha g) = \alpha I(g)$ *jokaiselle* $g \in \mathcal{K}(X)$ *ja* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(homogeenisuus).*

Radonin mitta laajennetaan positiivisille alaspäin puolijatkuville funktioille asettamalla

$$I^*(f) = \sup\left\{I(g) \mid g \in \mathcal{K}^+(X) \text{ ja } g \leq f\right\}.$$

Jos $f : X \to [0, \infty]$ *on mielivaltainen funktio, niin määritellään*

$$I^*(f) = \inf\left\{I^*(g) \mid g \text{ alaspäin puolijatkuva ja } g \geq f\right\}.$$

On helppo huomata, että $\mathcal{K}(X)$ on lineaarinen avaruus ja Radonin mitta on positiivinen lineaarinen kuvaus lineaarisessa avaruudessa $\mathcal{K}(X)$. Lisäksi on huomattavaa, että kuvaus I^* on määritelty jokaiselle ei-negatiiviselle funktiolle. Kuvauksen I^* idea onkin "ulkointegraali" eli funktion integraalia arvioidaan ylhäältä päin integroituvilla mitallisilla alaspäin puolijatkuvilla funktiolla. Tällöin saadaan kaikille ei-negattivisille funktioille määritelty "integraali", mutta se ei ole kuitenkaan additiivinen kaikkien ei-negatiivisten funktioiden joukossa.

Lemma 6.1.6 **(a)** $I^*(f) \leq I^*(g)$ *jokaiselle ei-negatiiviselle funktiolle* f *ja* g.

(b) $I^*(f+g) = I^*(f) + I^*(g)$ *kaikille ei-negatiivisille alaspäin puolijatkuville funktioille* f *ja* g.

(c) *Jos* $(f_i)_{i \in I}$ *on ylöspäin suunnattu perhe ei-negatiivisia alaspäin puolijatkuvia funktioita, niin*

$$I^*\left(\sup_{i \in I} f_i\right) = \sup_{i \in I} I^*(f_i).$$

(d) *Jos* $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ *on jono ei-negatiivisia alaspäin puolijatkuvia funktioita, niin*

$$I^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} I^*(f_i).$$

(e) *(Yleistetty monotonisen konvergenssin lause) Jos $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ on kasva jono ei-negatiivisia funktioita, niin*

$$I^*\left(\sup_{i\in\mathbf{N}} f_i\right) = \sup_{i\in\mathbf{N}} I^*(f_i).$$

(f) *Jos $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ on jono ei-negatiivisia funktioita, niin*

$$I^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} I^*(f_i).$$

Todistus. Ominaisuus (a) on selvä, sillä ehdosta $f \leq g$, $f, g \in \mathcal{K}(X)$, seuraa $g - f \geq 0$ ja siis $I(g) - I(f) \geq 0$.

Merkitsemme $f = \sup_{i\in I} f_i$. Osoitamme ensin ominaisuuden (c), kun funktiot f ja f_i ovat positiivisia ja kompati kantajaisia sekä jatkuvia . Olkoon $g \in \mathcal{K}^+(X)$ ja $g = 1$ joukossa supp$f$. Tällöin Dinin lauseen perusteella jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $f_{i(\epsilon)}$, jolle pätee $i(\epsilon) \in I$ ja $0 \leq f - f_{i(\epsilon)} \leq \epsilon g$. Siis saamme

$$0 \leq I(f) - I\left(f_{i(\epsilon)}\right) = I\left(f - f_{i(\epsilon)}\right) \leq \epsilon I(g).$$

Näin ollen (c) pätee, kun funktiot f ja f_i ovat positiivisia ja kompaktikantajaisia.

Oletetaan lopuksi, että funktio f on alaspäin puolijatkuva. Koska I^* on kasvava, saadaan

$$I^*(f) \geq \sup_{i\in I} I^*(f_i).$$

Olkoon $g \in \mathcal{K}^+(X)$ ja $g \leq f$. Koska

$$g = \sup\left\{\min(g,h) \mid h \leq f_i, h \in \mathcal{K}^+(X)\right\}$$

ja $\min(g,h) \in \mathcal{K}^+(X)$, niin alkuosan perusteella pätee

$$I(g) = \sup_h I(\min(g,h)) \leq \sup_{i\in I} I^*(f_i).$$

Siis (c) on voimassa.

Ominaisuus (b) seuraa helposti, sillä

$$\begin{aligned} I^*(f) + I^*(g) &= \sup\{I(h) \mid h \leq f, h \in \mathcal{K}^+(X)\} + \sup\{I(h) \mid h \leq g, h \in \mathcal{K}^+(X)\} \\ &= \sup\{I(h_1 + h_2) \mid h_1 \leq f, h_2 \leq g, h_1, h_2 \in \mathcal{K}^+(X)\} = I^*(f+g). \end{aligned}$$

Kohta (d) seuraa kohdasta (c).

Kohdan (e) todistamiseksi olkoon $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ kasvava jono ei-negatiivisia funktioita ja merkitsemme $f = \sup_{i\in\mathbf{N}} f_n$. On selvää, että

$$I^*(f) \geq I^*(f_n)$$

jokaiselle $n \in \mathbf{N}$. Voimme olettaa, että $I^*(f_n) < \infty$ jokaiselle $n \in \mathbf{N}$. Olkoon $\epsilon > 0$ ja olkoon $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ jono alaspäin puolijatkuvia funktioita, jotka toteuttavat ehdot

$$g_n \geq f_n \qquad \text{ja} \qquad I^*(g_n) < I^*(f_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

jokaiselle $n \in \mathbf{N}$. Merkitsemme

$$g'_n = \max_{1\leq i\leq n}(g_i) = \max\left(g_n, g'_{n-1}\right).$$

Tällöin yhtälöstä

$$g'_2 + \min(g_1,g_2) = \max(g_1,g_2) + \min(g_1,g_2) = g_1 + g_2$$

ja funktioiden g_i alaspäin puolijatkuvuudesta seuraa arvio

$$\begin{array}{rcl} I^*(g'_2) & = & I^*(g_1) + I^*(g_2) - I^*(\min(g_1,g_2)) \\ & \leq & I^*(g_1) + I^*(g_2) - I^*(f_1) \\ & < & I^*(f_2) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2^2}. \end{array}$$

Vastaavasti induktiivisesti voimme todistaa, että

$$I^*(g'_n) < I^*(f_n) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\epsilon}{2^i}.$$

Siis kohdan (c) nojalla saamme

$$\epsilon + \sup_{n\in\mathbf{N}} I^*(f_n) \geq \sup_{n\in\mathbf{N}} I^*(g'_n) = I^*\left(\sup_{n\in\mathbf{N}} g'_n\right) \geq I^*(f).$$

Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, väite (e) on todistettu.

Viimeisen ominaisuuden saamme täydellisestä additiivisuudesta, sillä

$$\begin{array}{rcl} \mu^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right) & = & \inf\left\{I^*(g) \mid g \geq \sum_{i=1}^{\infty} f_i,\ g \text{ a.p.j.}\right\} \\ & \leq & \inf\left\{I^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i\right) \mid g_i \geq f_i,\ g_i \text{ a.p.j.}\right\} \\ & \leq & \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} I^*(g_i) \mid g_i \geq f_i,\ g_i \text{ a.p.j.}\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} I^*(f_i). \qquad \square \end{array}$$

Pyrimme määrittelemään mitan Radonin mitan avulla. Ensiksi määrittelemme ulkomitan $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ asettamalla

$$\mu^*(U) = I^*(\chi_U). \tag{6.1}$$

Tällöin μ^* on todella ulkomitta, sillä $\mu^*(\emptyset) = 0$ ja ehdon (g) nojalla μ^* on subadditiivinen.

Lemma 6.1.7 **(a)** *Ulkomitta μ^* on täydellisesti additiivinen avoimien joukkojen luokassa.*

(b) *$\mu^*(K) < \infty$ jokaiselle kompaktille joukolla K.*

(c) *$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U) \mid A \subset U, U$ avoin$\}$ jokaiselle $A \subset X$.*

(d) *jos U on avoin, niin*

$$\begin{aligned} \mu^*(U) &= \sup\{\mu^*(K) \mid K \subset U, K \text{ kompakti}\} \\ &= \sup\left\{\mu^*(F) \mid \overline{F} \subset U, F \text{ avoin}, \overline{F} \text{ kompakti}\right\}. \end{aligned}$$

Todistus. Ensimmäinen väite on ilmeinen, sillä $\mu^*(U) = I^*(\chi_U)$, kun U on avoin.

(b) Olkoon $K \subset X$ kompakti. Tällöin Urysohnin lemman perusteella on olemassa jatkuva kompaktikantajainen funktio g siten, että $\chi_K \le g \le \chi_X$. Siis $\mu^*(K) \le I^*(g) < \infty$, mistä seuraa toinen väite.

(c) Olkoon A joukko ja g alaspäin puolijatkuva siten, että $g \ge \chi_A$. Tällöin joukko $U = \{x \mid g(x) > 1 - \epsilon\}$ on avoin jokaiselle $\epsilon > 0$ ja $g \ge (1-\epsilon)\chi_U \ge (1-\epsilon)\chi_A$. Siis

$$I^*(g) \ge (1-\epsilon) I^*(\chi_U) = (1-\epsilon)\mu^*(U) \ge (1-\epsilon)\inf\{\mu^*(U) \mid A \subset U, U \text{ avoin}\},$$

mistä seuraa

$$I^*(A) \ge (1-\epsilon)\inf\{\mu^*(U) \mid A \subset U, U \text{ avoin}\} \ge (1-\epsilon) I^*(A)$$

jokaiselle $\epsilon > 0$. Siis kolmas väite on voimassa.

(d) Oletamme, että U on avoin. Koska X on lokaalisti kompakti, niin on olemassa ylöspäin suunnattu perhe relatiivi kompakteja joukkoja $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$, joiden unioini on U ja $\overline{V_\alpha} \subset U$. Tällöin edellisen Lemman nojalla

$$\mu^*(U) = \sup_{\alpha \in I} \mu^*(V_\alpha) \le \sup_{\alpha \in I} \mu^*\left(\overline{V_\alpha}\right) \le \mu^*(U).$$

Lemma on siis todistettu. $\square$

Lause 6.1.8 *Avoimet ja suljetut joukot ovat mitallisia ulkomitan μ^* määräämässä mitallisten joukkojen luokassa. Edelleen Borelin joukot ovat mitallisia.*

Todistus. Olkoon $E \subset X$ ja $U \subset X$ avoin. Joukon U mitallisuus seuraa, jos pystymme osoittamaan epäyhtälön

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \backslash U). \tag{6.2}$$

Tämä epäyhtälö on selvästi voimassa, kun $\mu^*(E) = \infty$. Oletamme siis, että $\mu^*(E) < \infty$. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin on olemassa avoin joukko $V \supset E$ siten, että $\mu^*(V) < \mu^*(E) + \frac{\epsilon}{2}$. Edelleen olkoon $H \supset V \backslash U$ avoin joukko siten, että $\mu^*(H) < \mu^*(V \backslash U) + \frac{\epsilon}{4}$. Edellisen lemman nojalla on olemassa avoin joukko W, jonka sulkeuma $\overline{W}$ on kompakti ja $\overline{W} \subset V \cap U$ sekä $\mu^*(W) + \frac{\epsilon}{4} > \mu^*(V \cap U)$. Valitsemme $W_0 = V \cap H \cap \left(X \backslash \overline{W}\right)$. Tällöin joukot W ja W_0 ovat erillisiä avoimia joukkoja. Koska joukko $V \backslash U$ on joukkojen V, H ja $X \backslash \overline{W}$ osajoukko, niin $V \backslash U \subset W_0 \subset H$. Siis saamme

$$0 \leq \mu^*(W_0) - \mu^*(V \backslash U) \leq \mu^*(H) - \mu^*(V \backslash U) < \frac{\epsilon}{4}.$$

Näin ollen pätee

$$\begin{aligned}
&|\mu^*(W) + \mu^*(W_0) - \mu^*(V \cap U) - \mu^*(V \backslash U)| \\
&\leq |\mu^*(W) - \mu^*(V \cap U)| + |\mu^*(W) - \mu^*(V \cap U)| < \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4} = \tfrac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Käyttämällä ulkomitan additiivisuutta avoimille joukoille ja tietoa $W \cup W_0 \subset V$ huomaamme, että

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) + \epsilon &> \mu^*(V) + \tfrac{\epsilon}{2} \\
&\geq \mu^*(W \cup W_0) + \tfrac{\epsilon}{2} = \mu^*(W) + \mu^*(W_0) + \tfrac{\epsilon}{2} \\
&> \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \backslash U) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \backslash U).
\end{aligned}$$

Koska ϵ on mielivaltainen, epäyhtälö (6.2) on voimassa. Siis avoimet ja suljetut joukot ovat mitallisia. Näin ollen myös Borelin joukot ovat mitallisia. □

Merkitään jatkossa ulkomitan μ^* rajoittumaa mitallisten joukkojen σ-algebraan μ. Tällöin μ on mitta Lauseen 2.1.10 nojalla.

Lause 6.1.9 *Olkoon X lokaalikompakti Hausdorff avaruus ja μ^* edellä määritelty ulkomitta. Olkoon lisäksi A ulkomitan μ^* suhteen mitallinen joukko, jolle on olemassa joukot B_n siten, että $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ja $\mu^*(B_n) < \infty$. Tällöin on voimassa*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A,\ K \text{ kompakti}\}.$$

Lisäksi väite on voimassa jokaiselle avoimelle joukolle A.

Todistus. Oletamme aluksi, että $\mu(A) < \infty$. Tällöin on olemassa avoin joukko $V \supset A$ ja $\mu(V) < \mu(A) + \frac{\epsilon}{4}$. Koska

$$\mu(V) = \mu(A) + \mu(V \backslash A),$$

niin $\mu(V \backslash A) < \frac{\epsilon}{4}$. Olkoon $E \subset V$ kompakti joukko siten, että $\mu(V \backslash E) < \frac{\epsilon}{2}$. Valitsemme avoimen joukon W, jolle pätee $V \backslash A \subset W \subset V$ ja $\mu(W) < \frac{\epsilon}{2}$. Edelleen valitsemme $K = E \backslash W$. Tämä joukko toteuttaa ehdot $K \subset A$ ja

$$\begin{aligned} \mu(A \backslash K) = \mu(A \cap (W \cup (X \backslash E))) &\leq \mu(A \backslash E) + \mu(A \cap W) \\ &\leq \mu(V \backslash E) + \mu(W) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Koska A on mitallinen, niin

$$\mu(K) = \mu(A) - \mu(A \backslash K) > \mu(A) - \epsilon.$$

Siis väite pätee, kun $\mu(A) < \infty$.

Oletamme lopuksi, että $\mu(A) = \infty$. Voimme olettaa, että joukot B_n ovat avoimia ja siis mitallisia. Asetetamme $A_n = A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Tällöin alkuosan perusteella on olemassa kompakti joukko K_n siten, että $K_n \subset A_n$ ja $\mu(K_n) > \mu(A_n) - \epsilon$. Toisaalta (A_n) on kasvava jono mitallisia joukkoja ja $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$, joten mitan monotonisesta konvergenssilauseesta seuraa

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \mu(K_n) \geq \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) - \epsilon = \mu(A) - \epsilon = \infty.$$

Siis väite on voimassa. $\square$

Funktio I^* ei ole additiivinen kaikille funktioille, mutta seuraava tulos on jatkon kannalta merkittävä.

Lause 6.1.10 *Olkoon I Radonin mitta lokaalikompaktissa Hausdorff avaruudessa X. Tällöin pätee*

$$I^*\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I^*\left(\chi_{A_i}\right),$$

kun $\alpha_i > 0$ ja joukot A_i ovat keskenään pistevieraita.

Todistus. Funktion I^* kasvavuuden nojalla väite on selvästi voimassa, kun jollekin joukolle $I^*(A_i) = \infty$. Voimme siis olettaa, että $I^*(A_i) < \infty$ jokaiselle joukolle A_i. Todistamme ensin väitteen kompakteille pistevieraille joukoille K_i. Lemman 6.1.2 nojalla on olemassa avoimet pistevieraat joukot U_i siten, että $K_i \subset U_i$ ja $\overline{U_i}$ on kompakti jokaiselle $i = 1, ..., n$. Olkoon f positiivinen alaspäin puolijatkuva funktio, joka toteuttaa ehdon $f \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{K_i}$. Tällöin pätee

$$f \geq \sum_{i=1}^{n} f \chi_{U_i}$$

ja $f \chi_{U_i}$ on alaspäin puolijatkuva sekä $f \chi_{U_i} \geq \alpha_i \chi_{K_i}$. Siis saamme funktion I^* ominaisuuksien perusteella

$$I^*(f) \geq I^* \left(\sum_{i=1}^{n} f \chi_{U_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} I^* \left(f \chi_{U_i} \right) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I^* \left(\chi_{K_i} \right).$$

Koska funktio f on mielivaltainen, niin

$$I^* \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{K_i} \right) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I^* \left(\chi_{K_i} \right).$$

Käyttämällä funktion I^* subadditiivisuutta saamme väitteen, kun joukot A_i ovat kompakteja. Olkoon f positiivinen alaspäin puolijatkuva funktio, jolle pätee $f \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$. Lisäksi olkoon $K_i \subset A_i$ mielivaltainen kompakti joukko. Tällöin alkuosan perusteella toteamme, että

$$I^*(f) \geq I^* \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{K_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I^* \left(\chi_{K_i} \right).$$

Siis Lauseen 6.1.9 ja funktion I^* määritelmän perusteella saamme

$$I^*(f) \geq \sup_{K_i} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I^* \left(\chi_{K_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sup_{K_i} I^* \left(\chi_{K_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I^*(A),$$

mistä seuraa $I^* \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I^*(A)$. $\square$

Nyt voimme esittää funktioiden I^* ja μ välisen yhteyden.

Lause 6.1.11 *Olkoon X lokaalikompakti Hausdorff-avaruus ja I Radonin mitta avaruudessa X. Tällöin on olemassa täydellinen mitta-avaruus $(X, \mathcal{B}, \mu)$, joka toteuttaa ehdot*

(a) *σ-algebra $\mathcal{B}$ sisältää Borelin joukot,*

(b) *$I^*(f) = \int f d\mu$ jokaiselle ei-negatiiviselle mitalliselle funktiolle.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{B}$ ulkomitan μ^* suhteen mitallisten joukkojen joukko. Tällöin Lauseen 2.1.10 nojalla $\mathcal{B}$ on σ-algebra ja ulkomitan μ^* rajoittuma μ joukkoon $\mathcal{B}$ on täydellinen mitta. Borelin joukot ovat mitallisia Lauseen 6.1.8 perusteella.

Olkoon f ei-negatiivinen mitallinen funktio. Tällöin on olemassa yksinkertaisten mitallisten funktioiden kasvava jono (s_n) siten, että $\sup s_n = f$. Merkitään $s_n = \sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i \chi_{A_i}$, missä joukot A_i ovat pistevieraita ja $\alpha_i \geq 0$. Tällöin edellisen lauseen nojalla

$$I^*(s_n) = \sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i I^*\left(\chi_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i \mu\left(\chi_{A_i}\right) = \int s_n d\mu.$$

Soveltamalla ominaisuutta Lemmaa 6.1.6 ja Monotonista konvergenssilausetta saamme väitteen. □

Edellisestä tuloksesta saamme suoraan seuraavan tuloksen:

Lause 6.1.12 (RIESZIN ESITYSLAUSE) *Olkoon X lokaalikompakti Hausdorff avaruus. Jos I on positiivinen lineaarinen kuvaus kompakti kantajaisten reaaliarvoisten jatkuvien funktioiden joukossa (ts. Radonin mitta), niin on olemassa σ-algebra $\mathcal{B}$ ja siinä määritelty yksikäsitteinen mitta μ, joka toteuttaa ehdot:*

(a) *σ-algebra $\mathcal{B}$ sisältää Borelin joukot,*

(b) *$I(f) = \int f d\mu$ jokaiselle jatkuvalle kompakti kantajaiselle funktiolle f,*

(c) *jos A on avoin tai sellainen mitallinen joukko, jolle on olemassa joukot B_n siten, että $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ja $\mu^*(B_n) < \infty$, niin on voimassa*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A,\ K \text{ kompakti}\},$$

(d) *jos A on mitallinen, niin*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V) \mid A \subset V,\ V \text{ avoin}\},$$

(e) *mitta-avaruus $(X, \mathcal{B}, \mu)$ on täydellinen, ts. jos $A \subset E$ ja $\mu(E) = 0$, niin $A \in \mathcal{B}$ ja siis $\mu(A) = 0$.*

Todistus. Olkoon μ^* Radonin mitan I avulla saatu ulkomitta (katso 6.1) ja $\mathcal{B}$ ulkomitan μ^* suhteen mitalliset joukot. Edellä on todistettu, että on ulkomitan avulla saatu mitta μ toetuttaa ehdot (a)–(e). Siis olemassa olo on todistettu. Oletaan, että μ_1 on toinen σ-algebrassa $\mathcal{B}$ määriteltyjä mitta, joka toteuttaa ehdot (a)—(e). Olkoon K kompakti. Ehdon (d) nojalla edellä jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa avoin V siten, että $K \subset V$ ja $\mu_1(V) \leq \mu_1(K)+\varepsilon$. Koska $K \subset V$, niin Urysohnin lemman nojalla on olemassa kompaktikantajainen jatkuva $f : X \to [0,1]$ siten, että $\chi_K \leq f \leq \chi_V$. Siis

$$\mu(K) \leq \int f d\mu = I(f) = \int f d\mu_1 \leq \mu_1(V) \leq \mu_1(K) + \varepsilon.$$

Koska ε on mielivaltainen, niin $\mu(K) \leq \mu_1(K)$. Samalla tavalla saamme $\mu_1(K) \leq \mu(K)$. Näin ollen $\mu_1(K) = \mu(K)$ jokaiselle kompaktille joukolle K. Ehdon (c) nojalla $\mu(U) = \mu_1(U)$ jokaiselle avoimelle joukolle ja lopuksi ehdon (d) nojalla $\mu = \mu_1$.

Kirjallisuutta

[1] R. Ash, *Measure, Intregration, and Functional Analysis,* Academic Press, New York, 1972.

[2] H. Bauer, *Maß- und Integrationstheorie,* Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1990.

[3] G. Choquet, *Lectures on Analysis, Vol I,* W. A. Benjamin, London, 1969.

[4] A. Friedman, *Foundations of Modern Analysis,* Dover Publications, New York, 1982.

[5] A. Gluchoff, *Trigonometric Series and Theories of Integration*, Math. Magazine **67 (1**), 1994.

[6] E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis,* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1965.

[7] L. Myrberg, *Differentiaali ja integraalilaskenta 1*, Yhteiskirjapaino Oy, Helsinki, 1974.

[8] H. L. Royden, *Real Analysis,* The Macmillan Company, New York, 1968.

[9] W. Rudin, *Real and Complex Analysis,* Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1978.