1. Kompleksiluvut ja -funktiot

1.1 Kompleksiluvut.

Määritelmä. Kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ tarkoittaa järjestettyjen parien $\alpha = (a, b)$, $\beta = (c, d)$, $\ldots$ joukkoa, missä $a, b, \ldots \in \mathbb{R}$ siten, että

(1) $\alpha = \beta \quad \Leftrightarrow \quad a = c$ ja $b = d$

(2) $\alpha + \beta = (a + c, b + d)$

(3) $\alpha\beta = (ac - bd, ad + bc)$.

Korollaari.

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0 + 0) = (a + b, 0)$$
$$(a, 0)(b, 0) = (ab - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0)$$

Sen vuoksi tyyppiä $(a, 0)$ *olevat kompleksiluvut voidaan samaistaa reaaliakselin* $\mathbb{R}$ *kanssa. Täten voimme käyttää merkintää* $(a, 0) = a$.

Määritelmä. Määritellään $i = (0, 1)$.

Korollaari. $i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Huomautus.

(1) $(a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$

(2) tyyppiä bi olevia kompleksilukuja kutsutaan imaginaariluvuiksi (joskus puhtaasti imaginaarisiksi luvuiksi). Imaginaarilukujen joukkoa sanotaan imaginaariakseliksi.

Määritelmä. Kompleksiluvun $\alpha = (a, b)$ kompleksikonjugaatti on $\overline{\alpha} = (a, -b)$ (tai $\alpha = a + bi$, $\overline{\alpha} = a - bi$).

Määritelmä. Kompleksiluvun $\alpha = (a, b) = a + bi$ moduli on $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Huomautus.

(1)
$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - b^2 i^2 + abi - abi \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |\alpha|^2 \\ |\alpha|^2 &= \alpha\overline{\alpha}.\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{Re}(a + bi) = a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(a + bi) = b \in \mathbb{R}$.

(3) $\alpha + 0 = \alpha$ $(\forall \alpha \in \mathbb{C})$: 0 on yhteenlaskun neutraalialkio,
$\alpha \cdot 1 = \alpha$ $(\forall \alpha \in \mathbb{C})$: 1 on kertolaskun neutraalialkio,
$-\alpha = -(a, b) = (-a, -b)$.

Vähennyslasku määritellään $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$.

Kompleksinen jakaminen

Osamäärän $\frac{\alpha}{\beta}$ määrittely tarkoittaa yhtälön $\alpha z = \beta$, $z = ?$, ratkaisemista. Selvästikin on oltava $\alpha \neq (0,0)$. Olkoon $\alpha = a + bi, \beta = c + di$. Koska $\alpha \neq 0 \Rightarrow |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$. Nyt

$$\alpha z = \beta \quad | \cdot \alpha$$

$$|\alpha|^2 z = \overline{\alpha}\alpha z = \overline{\alpha}\beta \quad | \cdot \frac{1}{|\alpha|^2}$$

$$\frac{1}{|\alpha|^2}|\alpha|^2 z = 1 \cdot z = z = \frac{1}{|\alpha|^2}\overline{\alpha}\beta.$$

Määritelmä. Kun $\alpha \neq 0$,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\overline{\alpha}\beta}{|\alpha|^2}.$$

Korollaari. *Valitsemalla $\beta = 1$, saamme, kun $\alpha \neq 0$*

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Huomautus. Olemme nyt valmiit määrittelemään kompleksimuuttujan z kompleksikertoimiset polynomit $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, a_0, \ldots, a_n$ kompleksikertoimet. Jos $a_n \neq 0$, sanomme, että $P(z)$ on astetta $\deg P = n$. Jos $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, sanomme, että $P(z)$ on reaalinen polynomi. Kahden polynomin osamäärää $\frac{P(z)}{Q(z)}$ sanotaan rationaalifunktioksi.

1.2 Kompleksilukujen geometria.

Lause 1.2 a).

$$\alpha = a + bi \Rightarrow |a| = |\operatorname{Re}\alpha| \leq |\alpha|$$
$$|b| = |\operatorname{Im}\alpha| \leq |\alpha|.$$

Lause 1.2 b). *Mielivaltaisille kahdelle kompleksiluvulle* α, β, $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ *ja yhtälö pätee tässä jos ja vain jos toinen luvuista* α, β *on toisen ei-negatiivinen monikerta.*

Korollaari 1.2 c). $|\alpha + \beta| \geq \big||\alpha| - |\beta|\big|$.

Korollaari 1.2 d). $|\alpha_1 + \ldots + \alpha_n| \leq |\alpha_1| + \ldots |\alpha_n|$.

Korollaari. *Jos* $\alpha = a + ib$, *niin* $|\alpha| \leq |a| + |b|$.

Napakoordinaatit

Tarkastellaan pistettä $z = x + iy$. Napakoordinaattien avulla $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Annetulle x, y ($\Leftrightarrow z$) r on yksikäsitteinen $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Kuitenkin θ on vain 2π:n monikertaa vaille yksikäsitteisesti määrätty.

$$z = x + iy = r\cos\theta + i\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Silloin $z^2 = r^2|\cos\theta + i\sin\theta|^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \Rightarrow |z| = r$.

Merkitään $\arg z = \theta$; $\arg z$ ei ole yksikäsitteinen. Selvästi on olemassa täsmälleen yksi θ:n arvo, joka toteuttaa $-\pi < \theta \leq \pi$. Joskus tätä arvoa sanotaan $\arg z$:n pääarvoksi ja sitä merkitään $\Theta = \operatorname{Arg} z$.

Huom. θ on yksikäsitteinen vain 2π:n monikertaa vaille. $E(\theta)$ on yksikäsitteinen.

Olkoon $z = rE(\theta)$, $\zeta = \rho E(\phi)$. Tarkastellaan niiden tuloa:

$$\begin{aligned} z\zeta &= r\rho E(\theta)E(\phi) = r\rho(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\ &= r\rho((\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi)) \\ &= r\rho(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)) \\ &= r\rho E(\theta+\phi) = |z||\zeta|E(\theta+\phi). \end{aligned}$$

Sen vuoksi tulossa modulit kerrotaan keskenään ja argumentit lasketaan yhteen.

Lause 1.2 e). *Jos* $z = 0$, $\zeta = 0$, *niin*

$$\arg(z\zeta) = \arg z + \arg\zeta. \tag{$*$}$$

Huom. arg ei ole yksikäsitteinen $\Rightarrow$ $(*)$ pätee vain $\mod 2\pi$.

Olkoon $z = \zeta$ siten, että $r = |z| = |\zeta| = 1$. Silloin

$$
\begin{aligned}
&r\rho E(\theta)E(\phi) = r\rho E(\theta + \phi) \\
&\Rightarrow E(\theta)E(\theta) = E(\theta + \theta), \text{ koska } z = \zeta \Rightarrow \theta = \phi \\
&\Rightarrow E(\theta)^2 + E(2\theta) \\
&\Rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta
\end{aligned}
$$

Induktio $\Rightarrow$

Lause 1.2 f). *(de Moivré)*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

on voimassa kaikille $n \in \mathbb{Z}$.

Muutama sana kompleksilukujen rationaalisista potensseista: α on β:n n:s juuri ($n \in \mathbb{Z}$), jos $\alpha^n = \beta$. Oletetaan, että $\beta = rE(\theta)$. Selvästi $\alpha = \sqrt[n]{r}E\left(\frac{\theta}{n}\right) = r^{\frac{1}{n}}E\left(\frac{\theta}{n}\right)$ on β:n n:s juuri, sillä

$$\alpha^n = \left(r^{\frac{1}{n}}E\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)^n = \left(r^{\frac{1}{n}}\right)^n E\left(n \cdot \frac{\theta}{n}\right) = rE(\theta) = \beta.$$

Lause 1.2 g). *Jos $\beta \neq 0$ ja $n \in \mathbb{N}$, silloin on olemassa täsmälleen n erilaista β:n juurta, so., yhtälöllä $z^n = \beta$ on täsmälleen n erilaista ratkaisua.*

Olkoon $\beta \neq 0$ ja tarkastellaan rationaalilukua $\frac{p}{q}$. Oletetaan, että $\frac{p}{q}$ on supistumaton. Silloin voimme määritellä

$$\beta^{\frac{p}{q}} = (\beta^p)^{\frac{1}{q}} \qquad (q \text{ eri arvoa!})$$

Jos $\frac{p}{q}$ on supistuva, oletetaan, että $\frac{p_0}{q_0}$ $(= \frac{p}{q})$ supistettu $\frac{p}{q}$:n muoto, joka on supistumaton ja sitten määritellään

$$\beta^{\frac{p}{q}} = \beta^{\frac{p_0}{q_0}} = (\beta^{p_0})^{\frac{1}{q_0}}\,.$$

Huom. Näiden määritelmien pohjalta, jos $\frac{p}{q}$ on supistuva, silloin $(\beta^p)^{\frac{1}{q}}$ ja $\beta^{\frac{p}{q}}$ ei tarvitse olla samoja! Tarkastellaan $\frac{p}{q} = \frac{4}{2}$. Silloin $\beta^{\frac{4}{2}} = \beta^2$ on yksikäsitteinen, mutta $(\beta^4)^{\frac{1}{2}} = \pm\beta^2$ ei ole yksikäsitteinen.

1.3 Funktiot, jonot, raja-arvo ja jatkuvuus.

Määritelmä 1.3.1. Kompleksiluvun $\alpha \in \mathbb{C}$ ympäristöllä tarkoitetaan joukkoa $B(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - \alpha| < r\}$ jollekin $r > 0$. Punkteerattu luvun $\alpha \in \mathbb{C}$ ympäristö on osajoukko $B'(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, 0 < |z - \alpha| < r\}$. Nimityksiä: ympäristö $\approx$ (avoin) kiekko, punkteerattu ympäristö $\approx$ punkteerattu kiekko.

Funktio tarkoittaa kuvausta $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$. Kuvaus tavallisesti tarkoittaa $f : D \to D'$, missä $D, D' \subset \mathbb{C}$.

Siirto: $z \mapsto z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ kiinteä.

Kierto: $z \mapsto \alpha z$, missä $|\alpha| = 1$. $|\alpha z| = |\alpha||z| = |z|, \arg \alpha z = \arg \alpha + \arg z$.

Laajennus: $z \mapsto \alpha z$, missä $\alpha > 0$.

Jono, raja-arvo, jatkuvuus

Sovelletaan tuttuja merkintöjä reaalianalyysistä tasoon.

Esimerkki. Kompleksilukujen jono (z_n) suppenee kohden kompleksilukua z edellyttäen, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $N(\varepsilon)$ siten, että

$$|z_n - z| < \varepsilon, \text{ kun } n \geq N(\varepsilon).$$

Raja-arvo: Olkoon kompleksiarvoinen funktio f määritelty pisteen α punkteeratussa ympäristössä, so. $f : B'(\alpha, r) \to \mathbb{C}$. Silloin f:llä on raja-arvo $c \in \mathbb{C}$ pisteessä α, so. $\lim_{z \to \alpha} f(z) = c$, jos ja vain jos $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ siten, että $|f(z) - c| < \varepsilon$, kun $0 < |z - \alpha| < \delta$.

Jatkuvuus: Olkoon $f : B'(\alpha, r) \to \mathbb{C}$. Silloin f on jatkuva pisteessä $\alpha \Leftrightarrow \lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ siten, että $|f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon$, kun $|z - \alpha| < \delta$.

1.4 Käyrät ja integraalit.

Olkoon $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Välin I jako Δ on äärellinen joukko I:n pisteitä sisältäen päätepisteet a ja b. Tavallisesti merkitsemme

$$\Delta = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}, \text{ missä } a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b.$$

Vastaavia osavälejä (a_{k-1}, a_k) merkitään I_k:lla.

Funktio $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset I$, on paloittain jatkuva, jos

(i) $\exists$ välin I jako Δ siten, että $D \supset I \setminus \Delta$,

(ii) $f \,|\, I_k$ on jatkuva, $k = 1, 2, \ldots, n$,

(iii) f:llä on toispuoleiset raja-arvot kaikissa pisteissä $a_k \in \Delta$.

Lisäksi f on paloittain sileä, jos sen derivaatta f' on paloittain jatkuva. Lopulta kompleksiarvoinen funktio $f = g + ih$ on paloittain jatkuva/sileä, jos sekä g että h ovat paloittain jatkuvia/sileitä. Reaalianalyysistä on tunnettua, että $\int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_I f(t)\,dt$ on olemassa, jos reaaliarvoinen funktio f on paloittain jatkuva välillä I.

Nyt jos $f = g + ih$ on paloittain jatkuva, kompleksiarvoinen funktio, merkitsemme $\int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b g(t)\,dt + i\int\limits_a^b h(t)\,dt$.

Lause 1.4 a). *Jos f on paloittain jatkuva ja kompleksiarvoinen välillä I, niin*

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(\tau)\,d\tau = f(t)$$

jokaisessa pisteessä $t \in I$, missä f on jatkuva.

Lause 1.4 b). *Jos F on jatkuva, kompleksiarvoinen ja paloittain sileä siten, että $F' = f$, niin tällöin*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Lause 1.4 c). *Jos f on paloittain jatkuva välillä I, niin*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Yleensä käyrä joukossa D on jatkuva kuvaus

$$\psi : I \to D \quad (I = [a,b] \subset \mathbb{R}, D \subset \mathbb{C}).$$

Erikoisesti kompleksiarvoinen jatkuva funktio $\phi : I \to \mathbb{C}$ määrittelee käyrän.

Huomautus. $\phi(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ implikoi, että kompleksinen käyrä voidaan esittää kahden reaalisen käyrän avulla ($x = \xi(t)$,

$y = \eta(t)$, $t \in I$).
Piste $\phi(a)$ on alkupiste ja $\phi(b)$ on loppupiste.
Käyrä on yksinkertainen, jos se ei leikkaa itseään ($\Leftrightarrow$ ϕ on injektiivinen kuvaus). Käyrää sanotaan suljetuksi, jos $\phi(a) = \phi(b)$.

Yksinkertainen suljettu käyrä tarkoittaa, että jos $\phi(t_1) = \phi(t_2)$, niin joko $t_1 = t_2$ tai $t_1 = a$, $t_2 = b$. Yksinkertainen suljettu käyrä on Jordan-käyrä.

Lause 1.4 d). *(Jordanin käyrälause) Jordan-käyrä $\phi : I \to \mathbb{C}$ jakaa kompleksitason kolmeen erilliseen osaan:*

1.) $C = \phi(I)$,

2.) *käyrän C sisäosa $I(C)$,*

3.) *käyrän ulko-osa $E(C)$.*

Käyrää C ($\phi : I \to \mathbb{C}$) sanotaan sileäksi, jos ϕ on jatkuvasti differentioituva suhteessa $t \in I$ ($\exists \phi'(t)$ ja se on jatkuva) ja $\phi'(t) \neq 0 \, \forall t \in [a, b]$. Vastaavasti määrittelemme paloittain sileän käyrän, jota myös kutsutaan poluksi (polku). Ääriviiva (contour) tarkoittaa yksinkertaista, suljettua, paloittain sileää käyrää.

Merkitköön nyt C polkua $\phi : I \to \mathbb{C}$ kompleksitasossa $\mathbb{C}$. Määrittelemme (paloittain) jatkuvan kompleksiarvoisen funktion integraalin pitkin polkua C seuraavasti:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

Paloittain sileän käyrän pituus määritellään

$$\int_a^b |\phi'(t)|\,dt.$$

Lause 1.4 e). *Oletetaan, että f on paloittain jatkuva polulla C ja $|f(z)| \leq M$, $z \in C$, sekä polun pituus on L. Silloin*

$$\left| \int_C f(z)\,dz \right| \leq ML.$$

1.5 Cauchyn lauseet polynomeille ja rationaalifunktioille.

Lause 1.5 a). *Oletetaan, että*

(i) *$n \neq -1$ on kokonaisluku,*

(ii) *C on mv. polku pisteestä α pisteeseen β,*

(iii) *Jos $n < 0$, silloin oletamme, että C ei sisällä pistettä nolla (sisältää pisteet α ja β).*

Silloin

$$\int_C z^n\,dz = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1}.$$

Erikoisesti, jos C on suljettu ($\alpha = \beta$), niin $\int\limits_C z^n\,dz = 0$.

Lause 1.5 b). *(Cauchyn lause polynomeille) Jos P on polynomi ja C on suljettu polku kompleksitasossa $\mathbb{C}$, silloin*

$$\int_C P(z)\,dz = 0.$$

Huomautus. Olkoon C polku, jonka parametriesitys on $z = \phi(t) = r(t)(\cos(\theta(t)) + i\sin(\theta(t)))$, $a \le t \le b$. Oletetaan, että 0 (origo) ei sijaitse C:llä. Oletetaan myös, että $r(t)$ ja $\theta(t)$ ovat jatkuvia. Merkitään $\Delta_C(\theta) = \theta(b) - \theta(a)$.

$$\Delta_{C_1}(\theta) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \Delta_{C_2}(\theta) = \frac{5\pi}{2} - 0 = \frac{5\pi}{2}.$$

Lause 1.5 c). *Olkoon polku C annettu yhtälöllä $z = \phi(t) = r(t)(\cos(\theta(t)) + i\sin(\theta(t)))$, $a \le t \le b$. Merkitään $\alpha = \phi(a)$, $\beta = \phi(b)$ ja oletetaan, että C ei kulje pisteen 0 kautta. Silloin*

$$\int_C \frac{dz}{z} = \log|\beta| - \log|\alpha| + i\Delta_C(\theta).$$

Huomautus. Joissakin tapauksissa kompleksinen integrointi on riippumaton polusta (ja riippuu ainoastaan polun alku- ja loppupisteistä), joissakin tapauksissa se riippuu polusta. Ensimmäistä tyyppiä on $\int_C dz = \beta - \alpha$, toista tyyppiä Lause 1.5 c).

Korollaari 1.5 d). *Jos C on ääriviiva (= yksinkertainen, suljettu, paloittain sileä käyrä) s.e. $0 \in I(C)$, silloin*

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad \textit{(integroidaan positiivisessa suunnassa).}$$

Korollaari 1.5 e). *Jos C on ääriviiva s.e. $\alpha \in I(C)$, silloin*

$$\int_C \frac{dz}{z-\alpha} = 2\pi i \quad \textit{(integroidaan positiivisessa suunnassa).}$$

Korollaari 1.5 f). *Jos C on ääriviiva s.e. $\alpha \in E(C)$, silloin*

$$\int_C \frac{dz}{z-\alpha} = 0.$$

Lause 1.5 g). *(Cauchyn integraalikaava polynomeille)*
Jos $P(z)$ on polynomi ja C on ääriviiva, silloin

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P(z)}{z-\alpha}\, dz = \begin{cases} P(\alpha), & \alpha \in I(C) \\ \quad 0, & \alpha \in E(C). \end{cases}$$

Erikoistapauksia a) - g): (C on ääriviiva)

Lause 1.5 a). *Kokonaisluvulle $n \neq -1$ ja $\alpha \notin C$,*

$$\int_C \frac{dz}{(z-\alpha)^n} = 0, \quad \textit{ts. } \alpha \textit{ voi olla joko } I(C)\textit{:ssa tai } E(C)\textit{:ssa.}$$

Lause 1.5 e) ja f). *Jos $\alpha \notin C$, silloin*

$$\int_C \frac{dz}{z-\alpha} = \begin{cases} 2\pi i, & \alpha \in I(C) \\ 0, & \alpha \in E(C). \end{cases}$$

Lause 1.5 g). *Jos $P(z)$ on polynomi, silloin*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P(z)}{z-\alpha}\, dz = \begin{cases} P(\alpha), & \alpha \in I(C) \\ 0, & \alpha \in E(C). \end{cases}$$

Lause 1.5 h). *Olkoon $\frac{P(z)}{Q(z)}$ jaoton rationaalifunktio, missä $Q(z) = c(z-\beta_1)^{q_1}(z-\beta_2)^{q_2}\cdots(z-\beta_k)^{q_k}$, $c \in \mathbb{C}$. Silloin se voidaan esittää muodossa*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \frac{P_0(z)}{Q(z)} = S(z) + \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{q_j} \frac{\gamma_{jn}}{(z-\beta_j)^n},$$

missä $S(z)$ on polynomi, γ_{jn}:t ovat kompleksisia vakioita ja $\deg P_0(z) < \deg Q(z)$.

Lemma 1.5 i). *Olkoon C ääriviiva ja $\beta \in E(C)$. Silloin*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z-\beta)^n (z-\alpha)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha-\beta)^n}, & \alpha \in I(C) \\ 0, & \alpha \in E(C). \end{cases}$$

Lause 1.5 j). *(Cauchyn integraalikaava rationaalifunktioille) Olkoon C ääriviiva ja $\frac{P(z)}{Q(z)}$ jaoton rationaalifunktio siten, että $Q(z)$:n kaikki nollakohdat ovat $E(C)$:ssa. Silloin*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P(z)}{Q(z)}\frac{1}{z-\alpha}\,dz = \begin{cases} \dfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}, & \text{jos } \alpha \in I(C) \\ 0, & \text{jos } \alpha \in E(C). \end{cases}$$

1.6 Topologiset käsitteet.

Topologisia käsitteitä tullaan esittämään tarvittaessa. Toinen versio Jordanin käyrälauseesta:

Lause. *Olkoon C Jordan-käyrä (= yksinkertainen, suljettu). Silloin $\mathbb{C} \setminus C$ jakautuu kahteen osaan, joista toinen ($I(C)$) on rajoitettu ja toinen ($E(C)$) on rajoittamaton.*

2. Analyyttiset funktiot

2.1 Derivaatta.

Olkoon f kompleksiarvoinen funktio, joka on määritelty pisteen $a \in \mathbb{C}$ ympäristössä. Funktiolla f on derivaatta pisteessä a edellyttäen, että on olemassa

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Huom. Koska $z \to a$ mielivaltaisesti tasossa, tämä tarkoittaa, että funktion f suunnatut derivaatat (f tulkitaan kahden muuttujan x ja y funktiona) ovat olemassa ja ne ovat samat riippumatta suunnasta.

Huomautus. Kaikki standardit reaalianalyysin derivointisäännöt ovat voimassa.

Lause 2.1 d). *(Cauchy-Riemannin differentiaaliyhtälöt) Olkoon $f = u + iv$ funktion f esitys reaaliosan ja imaginaariosan avulla. Jos f on derivoituva pisteessä $z = x + iy$, niin*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Määritelmä. Kompleksiarvoista funktiota f, joka on määritelty pisteen $a \in \mathbb{C}$ ympäristössä, sanotaan analyyttiseksi pisteessä a, jos se on derivoituva pisteessä a.

Määritelmä. Kompleksiarvoista funktiota f, joka on määritelty kompleksitason $\mathbb{C}$ avoimessa joukossa U, sanotaan analyyttiseksi joukossa U, jos se on derivoituva kaikissa pisteissä $a \in U$.

Funktiota $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sanotaan kokonaiseksi (entire), jos se on analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä.

Lause 2.1 e). *Olkoon F aluessa (= avoin, yhtenäinen joukko) U jatkuvan funktion f integraalifunktio ja olkoon C polku joukossa U pisteestä α pisteeseen β. Silloin*

$$\int_C f(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha).$$

Korollaari 2.1 f). *Jos $F(z)$ ja $G(z)$ ovat molemmat jatkuvan funktion $f(z)$ integraalifunktioita, niin $G(z) - F(z) = k =$ vakio.*

Korollaari 2.1 g). *Olkoon U alue, $f : U \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio ja $F(z)$ sen integraalifunktio sekä C suljettu polku U:ssa. Silloin*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Lause 2.1 h). *Jos f on jatkuva alueessa $U \subset \mathbb{C}$, jos $\int_C f(z)\,dz = 0$ jokaiselle suljetulle polulle $C \subset U$, ja jos $F(z) = \int_\alpha^z f(\xi)\,d\xi$, missä integroidaan pitkin erästä polkua pisteestä α pisteeseen z, silloin F on analyyttinen U:ssa ja $F'(z) = f(z)$.*

Lause 2.1 i). *(Vastakohta Cauchy-Riemannin differentiaaliyhtälöt -lauseelle) Oletetaan, että reaaliarvoisilla funktioilla $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on jatkuvat osittaisderivaatat alueessa D siten, että Cauchy-Riemannin differentiaaliyhtälöt ovat voimassa alueessa D. Silloin $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ on analyyttinen D:ssä ja*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad \left(= \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right).$$

Huomautus. Oletetaan, että $f = u + iv$ on analyyttinen ja oletetaan, että toiset osittaisderivaatat ovat olemassa ja ovat jatkuvia. Silloin

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ ja } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Derivoimalla saadaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \text{ ja } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Osittaisderivaattojen jatkuvuuden (ja Analyysi 3:n) nojalla

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Sen vuoksi

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

Siksi ylläolevilla oletuksilla (ainakin), jos $f = u + iv$ on analyyttinen, silloin $\Delta u = 0$ (ja samaten $\Delta v = 0$) ja siten u ja v ovat harmonisia funktioita.

2.3 Äärettömät sarjat.

Ääretön sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$.

Osasumma $S_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Jos osasummien jonolla $\{S_n\}$ on raja-arvo $S = \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{C}$, sanomme sitä sarjan summaksi ja kirjoitamme

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k.$$

Jos sarjalla on summa, so. jonolla$\{S_n\}$ on raja-arvo, sanomme, että sarja suppenee; muutoin sarja hajaantuu. Jos $\sum |\alpha_k|$ suppenee, sanomme, että $\sum \alpha_k$ suppenee itseisesti. Keräämme suppenemiseen liittyviä lauseita ($\alpha_k \in \mathbb{C}$, $\alpha_n \in \mathbb{C}\ \forall k, n$).

Lause II. *(Vertailutesti) Oletetaan, että on olemassa kokonaisluku* $k > 0$, *jolle* $0 \leq a_k \leq b_k$, *kun* $k > K$. *Silloin*

(i) $\sum a_k$ *suppenee, jos* $\sum b_k$ *suppenee,*

(ii) $\sum b_k$ *hajaantuu, jos* $\sum a_k$ *hajaantuu.*

Lause 2.3 a). *Jos* $\sum \alpha_k$ *suppenee, silloin* $\alpha_k \to 0$.

Lause 2.3 b). *Jos* $\sum \alpha_k$ *suppenee, on olemassa* $M > 0$ *siten, että* $|\alpha_k| \leq M \ \forall k$.

Lause 2.3 d). *Jos* $\sum |\alpha_k|$ *suppenee, niin suppenee myös* $\sum \alpha_k$.

Lause 2.3 e). *(Cauchyn juuritesti)*

(a) *Jos on olemassa positiiviluku* $\lambda < 1$ *ja kokonaisluku* $N > 0$ *siten, että* $\sqrt{n}|\alpha_n| \leq \lambda$, $n \geq N$, *silloin* $\sum \alpha_n$ *suppenee.*

(b) *Jos on olemassa äärettömän monta erillistä n:n arvoa, joille* $\sqrt{n}|\alpha_n| \geq 1$, *silloin* $\sum \alpha_n$ *hajaantuu.*

Lause 2.3 g). *(Suhdetesti) Jos on olemassa kokonaisluku* N, *jolle* $\alpha_n \neq 0$, *kun* $n > N$, *ja positiiviluku* $\lambda < 1$, *jolle*

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| \leq \lambda, \ \ n > N, \ \ \textit{silloin} \sum \alpha_n \ \textit{suppenee.}$$

Jos on olemassa kokonaisluku N, jolle

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| \geq 1, \;\; n > N, \;\; \textit{silloin} \sum \alpha_n \;\; \textit{hajaantuu.}$$

2.4 Potenssisarjat.

Kiinnitetään nyt seuraava (käytännöllinen) sääntö: Kaikki perussäännöt koskien äärettömien sarjojen suppenemista (paitsi Leibnizin sääntö) siirtyvät reaalianalyysistä kompleksianalyysiin ymmärtämällä itseisarvo korvatuksi modulilla. Erikoisesti potenssisarja tarkoittaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k, \;\; c_k \in \mathbb{C}, \;\; \alpha \in \mathbb{C}.$$

Tavallisesti saatamme olettaa $\alpha = 0$. Potenssisarjaa $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ dominoi potenssisarja $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, jos $|a_k| \leq |b_k| \forall k \in \mathbb{N}_0$ $(\mathbb{N} \cup \{0\})$.

Useimmissa tapauksissa dominoivalla sarjalla on ei-negatiiviset reaalikertoimet.

Lisäys. On hyödyllistä määritellä analyyttisyyden käsite äärettömyydessä. Sanomme, että $f(z)$ on analyyttinen ∞:ssä, jos

(1) $f(z)$ on analyyttinen ∞:n eräässä punkteeratussa ympäristössä $B'(\infty, N) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > N\}$ ja

(2) $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, sieventämisen jälkeen, on analyyttinen origossa.

Lemma 2.4 a). *Jos $\sum c_k z^k$ suppenee arvolla z_0, $|z_0| = a > 0$, niin on olemassa $M > 0$ siten, että*

$$|c_k| \leq M a^{-k}\, \forall k.$$

Lemma 2.4 b).

(i) *Jos $\sum c_k z^k$ suppenee pisteessä $z = z_0$, $|z_0| = a > 0$, niin $\sum c_k z^k$ suppenee itseisesti $\forall z$, joille $|z| < a$.*

(ii) *Jos $\sum c_k z^k$ hajaantuu pisteessä $z = z_1$, niin $\sum c_k z^k$ hajaantuu $\forall z$, joille $|z| > |z_1|$.*

Merkitään joukko

$$C = \{|z| \,\big|\, z \in \mathbb{C},\ \sum c_k z^k \text{ suppenee}\}.$$

Silloin on olemassa

$$\rho = \sup C \leq +\infty,$$

koska $C \neq \emptyset$ $(0 \in C)$. Tällöin lukua ρ sanotaan potenssisarjan $\sum c_k z^k$ suppenemissäteeksi.

Lemma 2.4 c). *Olkoon ρ potenssisarjan $\sum c_k z^k$ suppenemissäde. Jos $|z| < \rho$, silloin $\sum c_k z^k$ suppenee itseisesti. Jos $|z| > \rho$, niin $\sum c_k z^k$ hajaantuu.*

Määritelmä. Annetulle potenssisarjalle $\sum c_k z^k$ sen suppenemissäde ρ määritellään

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k}$$

$(= \lim_{n\to\infty} \{\sup\{|c_k|^{1/k} \mid k \geq n\}\})$.

Huom. Sovitaan, että $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Korollaari 2.4 e). *Jos $\lim_{k\to\infty} |c_k|^{1/k}$ on olemassa potenssisarjalle $\sum c_k z^k$, silloin*

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{k\to\infty} |c_k|^{1/k}.$$

Lause 2.4 d). *Jos ρ on potenssisarjan $\sum c_k z^k$ suppenemissäde, niin silloin*

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|,$$

jos tämä raja-arvo on olemassa.

Lause 2.4 f). *Jos sarjalla $\sum b_k z^k$ on suppenemissäde ρ ja jos $|c_k| \leq |b_k|$ kaikilla k ($\geq k_0$), niin silloin $\sum b_k z^k$ suppenee ja sen suppenemissäde $\rho' \geq \rho$.*

Lemma 2.4. *Jos* $\sum b_k z^k$ *ja* $\sum c_k z^k$ *ovat kaksi potenssisarjaa, joiden suppenemissäteet ovat* ρ_b *ja* ρ_c*, niin silloin sarjojen* $\sum (b_k \pm c_k) z^k$ *suppenemissäteet ovat* $\geq \min(\rho_b, \rho_c)$.

Propositio 2.3 c). *Sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \text{ suppenee, kun } |z| < 1 \text{ ja } \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Jatkossa otetaan seuraavat merkinnät:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

suppeneva potenssisarja, jolla on suppenemissäde ρ_1.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

suppeneva potenssisarja, jolla on suppenemissäde ρ_2. Merkitään $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$.

Cauchyn tulokaava:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Tarkastelemme tuloa $f(z)g(z)$. Merkitään

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \text{ missä } c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}.$$

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k, \quad h_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k,$$

$$C_n = \sum_{j=0}^{n} |a_j||b_{n-j}| \ \left(\overset{\Delta\text{-ey}}{\geq} |c_n| \right), \quad P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_k z^k,$$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \ \text{ (jos } P(z) \text{ on olemassa).}$$

Lause 2.4 g). *Potenssisarjoilla $h(z)$ ja $P(z)$ on suppenemissäteet $\geq \rho$ ja $h(z) = f(z)g(z)$ kaikilla $|z| < \rho$.*

2.5 Potenssisarjojen analyyttisyys.

Lemma 2.5 a). *Potenssisarjoilla*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \ \textit{ja} \ \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$$

on sama suppenemissäde.

Lause 2.5 b). *Olkoon potenssisarjalla $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ suppenemissäde $\rho > 0$. Silloin sen summa*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

on analyyttinen kiekossa $|z| < \rho$ ja

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1} \text{ kaikille } z,\ |z| < \rho.$$

Huomautus. Suppenevalla potenssisarjalla $\sum c_k z^k$ on kaikki derivaatat kiekossa $|z| < \rho$ (vrt. Lemma 2.5. a)).

Korollaari 2.5. c). *Jos potenssisarjalla $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ on suppenemissäde $\rho > 0$, silloin kiekossa $|z| < \rho$ $f(z)$ on analyyttinen ja sillä on kaikki derivaatat sekä*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n z^{n-k}.$$

Korollaari 2.5. d). *Jos potenssisarjalla $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ on suppenemissäde $\rho > 0$, silloin*

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) \text{ kaikille } k \in \mathbb{N}_0.$$

Korollaari 2.5. e). *Jos funktiolla $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ on suppenemissäde $\rho > 0$, silloin $c_n = b_n$ kaikille $n \in \mathbb{N}_0$.*

2.6 Alkeis(transkendenttiset) funktiot.

Määritelmä 1. Määritellään funktio $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, myös merkitään $\exp(z) = e^z$, yhtälöllä

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Suppenemissäde on $+\infty$ $(= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{1} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1))$. Sen vuoksi e^z on analyyttinen koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$ (= kokonainen, entire) ja sillä on kaikki derivaatat.

Huomautus 1. Jos $z = x \in \mathbb{R}$, silloin $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (= reaalianalyyttinen eksponenttifunktio) $\Rightarrow$ $\exp(z)$ jatkaa tutun reaalianalyyttisen eksponenttifunktion koko kompleksitasoon $\mathbb{C}$.

Määritelmä 2.

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\
&= z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \\
&= z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots .
\end{aligned}$$

(suppenemissäteet $= +\infty \Rightarrow$ funktiot ovat määriteltyjä koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$)

Määritelmä 3.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

ainakin määritelty arvoille z s.e. $\cos z \neq 0$.

Määritelmä 4.

$$\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

Lause 2.6 a). *Kaikille $z, \zeta \in \mathbb{C}$,*

$$e^z \cdot e^\zeta = e^{z+\zeta}.$$

Lause 2.6 b). *Yhtälöllä $e^z = 0$ ei ole yhtään ratkaisua kompleksitasossa $\mathbb{C}$.*

Lause 2.6 c).

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

Lause 2.6 d). *Oletetaan, että y on reaalinen. Silloin*

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Nyt on helppoa todistaa, että $(\cos y + i \sin y)^n = \cos ny + i \sin ny$ (De Moivre):

$$(\cos y + i \sin y)^n = (e^{iy})^n = e^{i(ny)} = \cos ny + i \sin ny.$$

Lause 2.6 e). *Kompleksiluvuille* $z = x + iy$,

$$e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Lause 2.6 f). e^z *on jaksollinen funktio jaksona* $2\pi i$.

Lause. *Jos* ω *on* e^z*:n jakso, so.* $e^{z+\omega} = e^z \, \forall z \in \mathbb{C}$, *niin*

$$\omega = 2k\pi i \text{ jollekin } k \in \mathbb{Z}.$$

Lause 2.6 g). *Kaikille* $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$
$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Lause 2.6 g').

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz} e^z = e^z.$$

Lause 2.6 h).

$$\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z$$
$$\sinh iz = s \sin z, \quad \cosh iz = \cos z.$$

Lause 2.6 i).

$$\sin(z+\zeta) = \sin z \cos \zeta + \cos z \sin \zeta.$$

Huomautus. Vastaava tulos funktiolle $\cos(z+\zeta)$ saadaan derivoimalla Lauseen 2.6 i) kaavassa molemmilla puolilla ζ:n suhteen. $\cos(z+\zeta) = \cos z \cos \zeta - \sin z \sin \zeta$.

Lause 2.6 i'). *Kun* $z = x + iy$,

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

2.7 Logaritmi.

Koska e^z on jaksollinen funktio kompleksitasossa $\mathbb{C}$, määrittelemällä log funktion e^z käänteisfunktiona, välttämättä johtaa äärettömästi monikäsitteiseen "funktioon".

Palautetaan mieleen

Lause 1.5 c). *Jos* C *on polku pisteestä* $\alpha \in \mathbb{C}$ *pisteeseen* $\beta \in \mathbb{C}$ *välttäen origon ja määritellään* C *yhtälöllä* $z(t) = r(t)(\cos(\theta(t)) + i\sin(\theta(t)))$, *arvoilla* $a \le t \le b$, *silloin*

$$\int_C \frac{dz}{z} = \log|\beta| - \log|\alpha| + i\Delta_C(\theta),$$

missä $\Delta_C(\theta)$ *voi muuttua polusta toiseen.*

Huomautus 2. Määritelläksemme funktion $\log z$ valitsemme $\alpha = 1$, $\beta = z$ ja määrittelemme

$$\log z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \log|z| + i(\theta(z) - \theta(0)) = \log|z| + i \arg z,$$

missä $\arg z$ on määrätty 2π:n monikertaa vaille (so. arvo ei ole yksikäsitteinen vaan riippuu integrointipolusta pisteestä 1 pisteeseen z).

Huomautus 3. Tavallisesti $\log z$ kirjoitetaan muodossa

$$\log z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z + i2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lause 2.7 b).

$$\log z\zeta = \log z + \log \zeta.$$

Huom. Tämä tarkoittaa, että annetuille $\log z$, $\log \zeta$ ja kiinnitetyille k_z, k_ζ on olemassa 2π:n monikerta $2\pi k$ siten, että

$$\begin{aligned}\log|z\zeta| + i \operatorname{Arg}(z\zeta) + i2\pi k = &\log|z| + i \operatorname{Arg} z + i2\pi k_z \\ &+ \log|\zeta| + i \operatorname{Arg} \zeta + i2\pi k_\zeta.\end{aligned}$$

Korollaari.

$$\log \frac{z}{\zeta} = \log z - \log \zeta.$$

Huomautus. Olkoon $z_0 \neq 0$ annettu ja merkitköön $\log z_0$ jotakin logaritmifunktion arvoa pisteessä z_0. Valitaan z_0: ympäristö U siten, että $0 \notin U$ (U:n täytyy olla kyllin yksinkertainen, esim. kiekko keskipisteenä z_0). Sitten kiinnitetään $\log z$:n arvo pisteessä $z \in U$ yhtälllä

$$\log z - \log z_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

missä integrointi suoritetaan yli välin $[z_0, z]$.

$$\left(\log z = \log z_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{1}^{z_0} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{1}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta}\right).$$

Tämä kiinnittää arvon $\log z$, koska $\log z_0$ oli kiinnitetty.

Lause 2.7 e).

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}.$$

Huomautus. Sama huomautus kuten edellä pätee! Erikoisesti $\log z$ on analyyttinen ainoastaan lokaalisti sen jälkeen, kun sen arvo on kiinnitetty yksikäsitteisesti tarkastelun alaisessa (pienessä) ympäristössä.

Moniarvoisten funktioiden haarat (branch) $(\log z)$

Jos kykenemme kiinnittämään funktion $\log z$ arvon joukossa $U \subset \mathbb{C}$ yksikäsitteisesti, sanomme, että olemme valinneet tietyn $\log z$:n haaran U:ssa. Jos tietyn pisteen z_0 sijainti kompleksitasossa estää meitä kiinnittämästä yksikäsitteisesti $\log z$:n arvoa z_0:n ympäristössä, sanomme pistettä z_0 haarapisteeksi (branch point). Funktiolla $\log z$ tällainen haarapiste on $z_0 = 0$. Olkoon C mielivaltainen yksinkertainen käyrä pisteestä 0 pisteesee ∞. Sillin käyrää C sanotaan $\log z$:n haaraleikkaukseksi (branch cut). Mielivaltaiselle pisteelle z_0, joka ei sijaitse C:llä, valitsemme minkä tahansa mahdollisista arvoista $\log z_0$ ja mielivaltaiselle muulle pisteelle z, joka ei ole C:llä, meillä on täsmälleen yksi $\log z$:n arvo määrätty yhtälöllä

$$\log z - \log z_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

missä integrointipolku P ei leikkaa C:tä (ei voida kiertää origoa, joka on haarapiste, vrt. Korollaari 1.5 f)).

Tavallisesti log-funktion haaraleikkaukseksi valitaan negatiivinen reaaliakseli, joten $\log z$:n haara voidaan kiinnittää joukosta

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, z = re^{i\varphi}, \ -\pi < \varphi \leq \pi\}.$$

Tällöin määrittelemme $\log z$:n päähaaran, merkitään $\operatorname{Log} z$,

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i\theta, \ \ -\pi < \theta \leq \pi, \ \text{tai} \ \operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Lause 2.7 f). *Riippumatta* $\log z$*:n arvojen valinnasta meillä on*

a) $e^{\log z} = z$, $z \neq 0$,

b) $\log e^z = z + i2k\pi$ *jollekin* k.

Yleinen potenssifunktio $\mathbb{C}$:ssä

Olkoon $z \neq 0$ ja $\alpha \in \mathbb{C}$. Silloin saatamme määritellä $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$, mikä on monikäsitteinen funktio johtuen $\log z$:sta. Nyt tavalliset laskusäännöt potensseista voidaan todistaa modulo mahdollinen monikäsitteisyys.

3. Cauchy'n lause

Huomautus. f toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt $\Leftrightarrow$ f analyyttinen $\Leftrightarrow \exists f' \overset{\text{Kor. 2.1.g)}}{\Rightarrow} \int\limits_C f' = 0$, missä C on suljettu polku yhdesti yhtenäisessä aluessa R.

Lause 3.1 a). *(Cauchy'n lause kolmioille) Olkoon T kompleksitasossa $\mathbb{C}$ ja olkoon f analyyttinen sulkeumassa $\overline{T} = T \cup \partial T$. Silloin*

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0.$$

(∂T = topologinen reuna varustettuna positiivisella suunnistuksella).

Huomautus. Selvästi

$$\int_{-\partial T} f = -\int_{\partial T} f.$$

Yhdesti yhtenäinen alue D (intuitiivinen määritelmä): D on avoin ja

1° D koostuu "yhdestä palasesta" ja siinä ei ole "reikiä",

2° jokaiselle yksinkertaiselle suljetulle käyrälle C D:ssä, $I(C) \subset D$.

Alue D on tähden muotoinen, jos on olemassa (keski-)piste $\alpha \in D$ siten, että jokaiselle $z \in D$ jana $[\alpha, z] \subset D$. Tähden muotoinen alue D on aina yhdesti yhtenäinen.

Lause 3.1 b). *(Cauchy'n lause) Olkoon D yhdesti yhtenäinen alue, C suljettu polku D:ssä ja f analyyttinen. Silloin*

$$\int_C f = 0.$$

Palautetaan mieleen: ääriviiva = yksinkertainen suljettu paloittain sileä käyrä.

Korollaari 3.1 c). *Olkoon f analyyttinen alueessa D ja olkoon C ääriviiva D:ssä siten, että $I(C) \subset D$. Silloin $\int\limits_C f = 0$.*

Lause 3.1 d). *(Cauchy'n lause kahdelle ääriviivalle) Olkoot C_1, C_2 kaksi ääriviivaa $\mathbb{C}$:ssä siten, että $C_2 \subset I(C_1)$ ja olkoon f analyyttinen alueessa $D \supset C_1 \cup I(C_1) \setminus I(C_2)$. Silloin*

$$\int_{C_1} f = \int_{C_2} f$$

(suunnistukset positiivisia $I(C_1)$:n ja $I(C_2)$:n suhteen).

3.2 Cauchy'n integraalikaava.

Lause 3.2 a). *(CIK) Olkoon f analyyttinen alueessa $D \subset \mathbb{C}$ ja olkoon $C \subset D$ ääriviiva, $I(C) \subset D$. Silloin*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in I(C) \\ 0, & z \in E(C). \end{cases}$$

Lause 3.2 b). *Olkoon ϕ jatkuva funktio polulla $\mathcal{L}$, jolla on äärellinen pituus L ja määritellään*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

kun $z \notin \mathcal{L}$. Silloin f on analyyttinen $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$:ssä ja

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Lause 3.2 c). *Samoilla oletuksilla kuin Lauseessa 3.2 b) $f''(z)$ on olemassa, kun $z \notin \mathcal{L}$ ja*

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\, d\zeta.$$

Lause 3.2 d). *Olkoon f analyyttinen alueessa $D \subset \mathbb{C}$. Silloin f on äärettömästi differentioituva, ts. kaikki derivaatat $f^{(n)}$ ovat olemassa. Lisäksi, jos $C \subset D$ on ääriviiva, niin*

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} = \begin{cases} f^{(n)}(z), & z \in I(C) \\ 0, & z \in E(C). \end{cases}$$

Lemma. *Olkoot $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ jatkuvasti differentioituvia funktioita. Silloin*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

Huom. 1. Olkoon C polku (joka on kyllin sileä, so. polkukuvaus), $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ (on jatkuvasti differentioituva). Silloin ($f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jatkuvasti differentioituva)

$$\begin{aligned}
\int_C fg' = \int_C f(z)g'(z)\,dz &= \int_a^b f(\phi(t))g'(\phi(t))\phi'(t)\,dt \\
&= \int_a^b (f \circ \phi)(t)(g \circ \phi)'(t)\,dt \\
&\overset{\text{Lemma}}{=} f(\phi(b))g(\phi(b)) - f(\phi(a))g(\phi(a)) \\
&\qquad - \int_a^b (f \circ \phi)'(t)(g \circ \phi)(t)\,dt \\
&= f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_a^b f'(\phi(t))g(\phi(t))\phi'(t)\,dt \\
&= f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_C f'(z)g(z)\,dz \\
&= f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_C f'g.
\end{aligned}$$

Huom. 2. Jos C on suljettu polku (kyllin sileä), niin

$$\int\limits_C fg' = -\int\limits_C f'g.$$

Lause 3.2 e). *(Morera) Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio alueessa D siten, että kaikille suljetuille poluille $C \subset D$ $\int\limits_C f = 0$. Silloin f on analyyttinen.*

Cauchyn arvio

Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio (rajoitetussa) alueessa D. Valitaan $\alpha \in D$ ja merkitään $d = dist(\alpha, \partial D)$. Olkoon r, $0 < r < d$. (Olkoon $\alpha \in D$.) Silloin f on analyyttinen ja siksi myös jatkuva sulkeumassa $\overline{B(\alpha, r)}$ ja siten f on rajoitettu $\overline{B(\alpha, r)}$:ssa, sanokaamme $|f(z)| \leq M$ kaikille z, $|z - \alpha| \leq r$.

$$\left.\begin{array}{l} |f| \text{ jatkuva funktio} \\ \overline{B(\alpha, r)} \text{ kompakti} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} |f| \text{ saavuttaa suurimman arvonsa} \\ \overline{B(\alpha, r)}\text{:ssa} \end{array}$$

Lause 3.2 f). *Ylläolevilla merkinnöillä*

$$|f^{(n)}(\alpha)| \leq \frac{Mn!}{r^n}.$$

Lause 3.2 g). *(Liouville) Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analyyttinen (so. kokonainen). Jos f on rajoitettu, niin f on vakio.*

Lause 3.2 h). *(Algebran peruslause) Jos $P(z)$ on polynomi, jonka aste ≥ 1, silloin yhtälöllä $P(z) = 0$ on ainakin yksi juuri $\mathbb{C}$:ssä.*

Korollaari. *Jokaisella polynomilla $P(z)$, jonka aste $= n \geq 1$, on täsmälleen n juurta $\mathbb{C}$:ssä (laskien moninkertaisuuden).*

Funktio $u : D \to \mathbb{R}$, D alue $\mathbb{C}$:ssä, on harmoninen, jos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Huomautus. Jos $f : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen funktio, niin $\operatorname{Re} f$ ja $\operatorname{Im} f$ ovat molemmat harmonisia. Itse asiassa funktiolle $f = u + iv$ Cauchy-Riemannin differentiaaliyhtälöt ovat

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \text{ joten}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Siis u on harmoninen funktio. Vastaava pätee funktiolle v.

Lause 3.2 i). *Olkoon $u : D \to \mathbb{R}$, D yhdesti yhtenäinen alue $\subset \mathbb{C}$, harmoninen. Määritellään* $(u(z) = u(x,y))$

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial u(\zeta)}{\partial x} - i \frac{\partial u(\zeta)}{\partial y} \right) d\zeta + u(z_0),$$

missä integrointi on pitkin mielivaltaista polkua z_0:sta z:aan. Silloin f on analyyttinen ja $\operatorname{Re} f = u$.

3.3 Taylorin ja Laurentin sarjat.

Suppenevan potenssisarjan summafunktio on derivoituva, voidaan derivoida termeittäin, ja siis analyyttinen. Lisäksi, jos summaa merkitään

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-\alpha)^k, \text{ silloin (Kor. 2.5 d)) } a_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}.$$

Toiseen suuntaan pätee seuraava lause:

Lause 3.3 a). *Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen, $D \subset \mathbb{C}$ alue ja merkitään $\delta = \operatorname{dist}(\alpha, \partial D) (= \inf\{|\alpha - z| : z \in \partial D\})$, $\alpha \in D$ kiinnitetty. Silloin jokaiselle z siten, että $|z - \alpha| < \delta$, funktiolla f on kehitelmä*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k,$$

$$\text{missä } c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - \alpha| = a} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - \alpha)^{k+1}}$$

mielivaltaiselle a siten, että $0 < a < \delta$. *(Taylorin sarjaesitys)*

Tarkastellaan potenssisarjaa, jolla on negatiiviset eksponentit, so.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-\alpha)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{1}{(z-\alpha)^k}.$$

Tätä voidaan tarkastella samalla tavalla kuin edellä. Tällöin potenssisarjojen teoria yhä soveltuu ja antaa tietyn suppenemissäteen R siten, että $\left|\frac{1}{z-\alpha}\right| < R(\leq \infty)$. Tämä tarkoittaa, että suppenemisalue on $|z-\alpha| > \frac{1}{R}$, siis ympyrän ulkopuoli. Jos lasketaan yhteen Taylorin sarja ja jälkimmäistä tyyppiä oleva sarja, niin tämä voidaan tehdä yhteisessä suppenemisalueessa ja saadaan sarja, joka on tyyppiä

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k.$$

Suppenemisalue on silloin ympyrärengas $r < |z-\alpha| < R$ joillekin r, R.

Lause 3.3 c). *(Laurent) Oletetaan, että* $0 \leq a < r < b \leq \infty$. *Olkoon* f *analyyttinen joukon* $A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, a < |z-\alpha| < b\}$ *ympäristössä,* $\alpha \in \mathbb{C}$ *kiinnitetty. Silloin funktiolla* f *on Laurentin sarjaesitys*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k, \text{ missä } c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-\alpha|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{k+1}}\, d\zeta$$

kaikille $k \in \mathbb{Z}$.

Huomautus. Laurentin sarja on yksikäsitteisesti määrätty, ts. saadaanpa funktiolle potenssisarjaesitys keinolla millä hyvänsä, on se Laurentin sarja. Taylorin sarjalle yksikäsitteisyys nähdään välittömästi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-\alpha)^k = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-\alpha)^k.$$

Olkoon $z \to \alpha \Rightarrow a_0 = b_0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k (z-\alpha)^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k (z-\alpha)$.
Olkoon $z \to \alpha \Rightarrow a_1 = b_1 \Rightarrow$ jne...

3.4 Keskiarvolause ja maksimiperiaate.

Lause 3.4 a). *(Gaussin keskiarvolause) Olkoon f analyyttinen funktio alueessa $D \subset \mathbb{C}$. Silloin, jokaiselle $B(\alpha, r)$ siten, että $\overline{B(\alpha, r)} \subset D$, pätee*

$$\text{(G)} \qquad f(\alpha) = \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\alpha + re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Huom. 1. Ottamalla yhtälössä (G) puolittain reaaliosat ja palauttamalla mieliin, että harmoniset funktiot voidaan aina esittää analyyttisten funktioiden reaaliosina, Gaussin keskiarvolause pätee mys harmonisille funktioille:

$$h(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty h(\alpha + re^{i\varphi})\, d\varphi, \quad h\,:\,D \to \mathbb{R} \text{ harmoninen.}$$

Huom. 2. $d\varphi$ voidaan esittää pituuselementtinä pitkin ympyrää, s.o. $ds = r\, d\varphi \Rightarrow$

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|\varsigma-\alpha|=r} f(\varsigma)\, ds, \quad \varsigma = \alpha + re^{i\varphi}.$$

Lause 3.4 c). *(Maksimiperiaate) Olkoon $f\,:\,D \to \mathbb{C}$ analyyttinen alueessa $D \subset \mathbb{C}$. Jos on olemassa maksimikohta D:ssa, s.o. $z_0 \in D$ siten, että*

$$f(z_0)| \geq |f(z)|$$

kaikille $z \in D$, silloin f on vakio.

Huom. Toisin sanoen, analyyttiselle funktiolle alueessa D, sen moduli saa maksimiarvonsa reunalla ∂D, eikä koskaan D:ssä.

Huom. Jos $f\,:\,D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen funktio ja D ei ole yhtenäinen (koostuu ≥ 2 palasesta), silloin maksimiperiaate ei pidä paikkaansa.

Korollaari 3.4 d). *(Minimiperiaate) Oletetaan, että* $f : D \to \mathbb{C}$ *on analyyttinen funktio alueessa* $D \subset \mathbb{C}$ *ja* $f(z) \neq 0$ *kaikille* $z \in D$*. Silloin, jos jollekin* $z_0 \in D$ *pätee,* $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ *kaikille* $z \in D$*,* f *on vakio.*

Lause 3.4 f). *(Yksikäsitteisyyslause) Oletetaan, että* $f : D \to \mathbb{C}$ *on analyyttinen alueessa* D *ja on olemassa jono* (z_n) D*:ssä supeten kohti pistettä* $\alpha \in D$ $(z_n \neq \alpha)$ *siten, että* $f(z_n) = 0$ *kaikille* $n \in \mathbb{N}$*. Silloin* $f \equiv 0$*.*

Huom. Niin muodoin analyyttisen funktion f nollakohtien täytyy olla eristettyjä (isoloituja, isolated) ja jos nollakohtia on olemassa, niiden täytyy supeta reunapistettä kohti.

Lause 3.4 h). *Olkoon* $f : D \to \mathbb{C}$ *analyyttinen funktio alueessa* $D \subset \mathbb{C}$ *ja oletetaan, että on olemassa* $\alpha \in D$ *siten, että* $f(\alpha) = 0$*. Silloin, joko* $f \equiv 0$ *alueessa* D *tai on olemassa punkteerattu* α*-keskinen ympäristö* D' *siten, että* $f(z) \neq 0$ *kaikille* $z \in D'$ $(\forall z \in D, z \neq \alpha)$*.*

Korollaari 3.4 i). *Oletetaan, että* $f : D \to \mathbb{C}$ *on analyyttinen alueessa* $D \subset \mathbb{C}$ *ja että sillä on eristetty (isoloitu) nollakohta pisteessä* $\alpha \in D$*. Silloin, jollekin* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$f(z) = (z - \alpha)^n g(z),$$

missä g *on analyyttinen* D*:ssä ja* $g(\alpha) \neq 0$*.*

Lemma 3.4 j). *(Schwarzin lemma) Olkoon* $D = \{z : |z| < 1\}$ *ja olkoon* $f : D \to \mathbb{C}$ *analyyttinen funktio siten, että*

(i) $|f(z)| < 1$ *kaikille* $z \in D$,

(ii) $f(0) = 0$.

Silloin $|f(z)| \leq |z|$ *kaikille* $z \in D$. *Lisäksi on olemassa kaksi mahdollisuutta: joko (i)* $|f(z)| < |z|$ *kaikille* $z \in D$, $z \neq 0$, *tai (ii)* $f(z) = ze^{i\alpha}$ *jollekin* $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.5 Analyyttisten funktioiden tasainen suppeneminen.

Palautetaan mieliin: Olkoon $(\phi_n(z)))$ kompleksiarvoisten funktioiden jono alueessa D supeten (pisteittäin) kohti funktiota $\phi(z)$. Tämä suppeneminen on tasaista, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $N = N(D, \varepsilon)$ siten, että $|\phi_n(z) - \phi(z)| < \varepsilon$ kaikille $z \in D$ milloin tahansa $n \geq N$.

Lause 3.5 a). *Jos* ϕ_n *suppenee tasaisesti alueessa* D *kohti funktiota* ϕ *ja kaikki funktiot* ϕ_n *ovat jatkuvia, silloin* ϕ *on jatkuva.*

Lause 3.5 b). *Olkoon* $(\phi_n(z))$ *jono jatkuvia kompleksiarvoisia funktioita polulla* $C \subset \mathbb{C}$ *siten, että* $\phi_n(z)$ *suppenee kohti funk-*

tiota $\phi(z)$ *tasaisesti* C*:llä. Silloin*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_C \phi_n(z)\,dz = \int\limits_C \phi(z)\,dz.$$

Lause 3.5 c). *Oletetaan, että* (u_n) *on jono analyyttisia funktioita alueessa* $D \subset \mathbb{C}$ *siten, että* $u_n \to u$ *tasaisesti* D*:ssa. Silloin* u *on analyyttinen* D*:ssa ja* $u_n^{(k)}(z) \to u^{(k)}(z)$ *kaikilla* $k \in \mathbb{N}$ *ja* $z \in D$.

4. Möbius-muunnokset

Möbius-muunnos on lineaarinen (viivallinen) muunnos (transformaatio). Sen yleinen muoto on

$$w(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \det \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \tag{1}$$

$w : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, missä $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Lause 4.1 a). *Möbius-muunnos on bijektio* $: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ *ja on konforminen (analyyttinen bijektio) paitsi napapisteessä* $z = -\delta/\gamma$.

Määritelmä. Suora on ∞:n kautta kulkeva ympyrä.

Tätä määritelmää käyttäen voidaan todeta

Lause 4.2 b). *Möbius-muunnos* $w = 1/z$ *kuvaa*

(a) ∞*:n kautta kulkevan ympyrän origon kautta kulkevalle ympyrälle;*

(b) *origon kautta kulkevan ympyrän* ∞*:n kautta kulkevalle ympyrälle;*

(c) *ympyrän, joka ei kulje origon eikä* ∞*:n kautta, samankaltaiselle ympyrälle.*

Lause 4.2 c). *Jos $\gamma \neq 0$, silloin Lause 4.2 b) pysyy voimassa Möbius-muunnokselle*

$$w = w(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

missä "origo" on korvattu kompleksiluvulla $z_0 = -\delta/\gamma$.

Lause 4.2 d). *Olkoon annettu kaksi kompleksilukukolmikkoa $\{z_1, z_2, z_3\}$ ja $\{w_1, w_2, w_3\}$ laajennetussa kompleksitasossa $\hat{\mathbb{C}}$ kukin näistä koostuen erillisistä pisteistä. Silloin on olemassa täsmälleen yksi Möbius-muunnos $w = T(z)\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, siten, että $T(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.*