

### Differentiaaliyhtälöt, syksy 2000, laskuharjoitus 3

1. Ratkaise muuttujien erotuksella

$$x' = ax - bx^2 \quad x(0) = x_0$$

2. Tarkastellaan oheista väestödatatehtävää. Käytä edellisen tehtävän tulosta (a) kohdassa. (b) kohdassa totea, että annettu kaava on väärä. Kyseisen tehtävän kannalta on myös mielekästä muokata (a) kohdan muotoa. Seuraava muoto on parempi. Pohdi miksi.

$$N(t) = \frac{k}{1 + d \exp(-s(t - 1790)/200)}$$

Totea että näillä merkinnöillä saadaan oikea tulos kun valitaan  $d \approx 49.2$ ,  $s \approx 6.268$  ja  $k$  kuten tehtävässä. (c) kohdassa pohdi onko malli uudemman datan perusteella enää käyttökelpoinen.

3. Oletetaan, että kappaleen jäähtymisnopeus on suoraan verrannollinen kappaleen lämpötilan ja ympäröivän ilman lämpötilan erotukseen. Minkä difyhtälön saat lämpötilalle? Oletetaan, että kappaleen lämpötila on alussa  $100^\circ \text{C}$  ja ilman lämpötila  $20^\circ$ . Jos 20 minuutin kuluttua kappaleen lämpötila on  $60^\circ$ , niin kauanko kestää ennen kuin kappaleen lämpötila on  $30^\circ$ ?

4. Ratkaise seuraavat difyhtälöt

- $x' = ax/t + 1 + 1/t$
- $x' = -x \cos(t) + \sin(2t)/2$
- $x' = -tx + t^3 x^3$

Viimeisessä tehtävässä palauta difyhtälö lineaariseksi sijoituksen  $y = 1/x^2$  avulla. Hahmottele suuntakenttiä.

- (a) Consider the equation  $N' = rN(1 - \frac{N}{k})$ , which is a form of the logistic equation discussed in Example 2.5.1 and solved in Example 2.1.2. Confirm that one way of writing the solution is

$$N = \frac{k}{1 + \frac{e^{-rt}}{c}}$$

- (b) The formula of part (a) was used successfully by R.L. Pearl and L.J. Read (*Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1920, p. 275) to demonstrate a rather good fit with the population data of the United States gathered in the decennial census from 1790 to 1910. Using 1790, 1850, and 1910 as the points by which to evaluate the constants they obtained

$$N = \frac{197,273,000}{1 + e^{-0.0313395t}}$$

and then calculated a predicted  $N(t)$  for each of the decades between, to compare with the census figures. The results are given in the table, with four more decades added by the Dartmouth College Writing Group in 1967.

Year	Population from Census	Population from Formula (6)	Error	%Error
1790	3,929,000	3,929,000	0	0.0
1800	5,308,000	5,336,000	28,000	0.5
1810	7,240,000	7,228,000	-12,000	-0.2
1820	9,638,000	9,757,000	119,000	1.2
1830	12,866,000	13,109,000	243,000	1.9
1840	17,069,000	17,506,000	437,000	2.6
1850	23,192,000	23,192,000	0	0.0
1860	31,443,000	30,412,000	-1,031,000	-3.3
1870	38,558,000	39,372,000	814,000	2.1
1880	50,156,000	50,177,000	21,000	0.0
1890	62,948,000	62,769,000	-179,000	-0.3
1900	75,995,000	76,870,000	875,000	1.2
1910	91,972,000	91,972,000	0	0.0
1920	105,711,000	107,559,000	1,848,000	1.7
1930	122,775,000	123,124,000	349,000	0.3
1940	131,669,000	136,653,000	4,984,000	3.8
1950	150,697,000	149,053,000	-1,644,000	-1.1
1960	179,300,000 <sup>1</sup>			
1970	204,000,000 <sup>1</sup>			
1980	226,500,000 <sup>1</sup>			

<sup>1</sup>Rounded to the nearest hundred thousand.

- (c) Update and revise the table using the more recent census data. Do you think it advisable to change the three base years used to evaluate the constants? How much difference would it make?