Differentiaaliyhtälöt, syksy 2000, laskuharjoitus 11

1. Tarkastellaan seuraavia yhtälöitä

$$(i) \quad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\sin(x_1) - 3x_2 \end{cases} \qquad (ii) \quad \begin{cases} x_1' = x_2^2 - 1 \\ x_2' = x_1^2 + x_2^2 - 2 \end{cases}$$

$$(iii) \quad \begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_2^2 - 25 \\ x_2' = x_1 x_2 - 12 \end{cases} \qquad (iv) \quad \begin{cases} x_1' = \sin\big(\pi(x_1 - x_2)\big) \\ x_2' = x_1 x_2 - 1 \end{cases}$$

   - Etsi näitten systeemien tasapainopisteet
   - Linearisoi systeemit tasapainopisteissä
   - Laske linearisoidun systeemin ominaisarvot. Jos ominaisarvot ovat reaalisia, laske myös ominaisvektorit.
   - Mikä on linearisoitujen systeemien tyyppi?
   - Hahmottele alkuperäistä vektorikenttää tasapainopisteen lähistöllä ja yritä päätellä vastaako linearisoitu systeemi alkuperäistä. Piirrä kuvaan myös linearisoidun systeemin ominaisavaruudet (jos ominaisarvot reaalisia).

2. Piirrä seuraavassa jokin vektorikenttä jolla on vaaditut ominaisuudet. Huomaa että ominaisuudet eivät määrää vektorikenttää yksikäsitteisesti vaan erilaisia mahdollisuuksia on hyvin paljon.

   - Tarkastellaan tehtävää $x' = f(x)$ ja oletetaan että f:llä on 2 tasapainopistettä. Hahmottele tasoon jokin tällainen f kun vaaditaan lisäksi seuraava ominaisuus: on olemassa pisteet a ja $p \in \mathbb{R}^2$ ($a \neq p$) siten, että jos x on yhtälön $x' = f(x)$ ratkaisu joka lisäksi toteuttaa alkuehdon $x(0) = a$, niin $\lim_{t\to\infty} x(t) = p$ ja $\lim_{t\to-\infty} x(t) = p$.
   - Tarkastellaan tehtävää $x' = g(x)$ ja oletetaan että g:llä on 2 tasapainopistettä. Hahmottele tasoon jokin tällainen g kun vaaditaan lisäksi seuraava ominaisuus: on olemassa 3 eri pistettä a, b ja $p \in \mathbb{R}^2$ siten, että $\lim_{t\to\infty} y(t) = p$ ja $\lim_{t\to-\infty} z(t) = p$, missä y on tehtävän $x' = g(x)$, $x(0) = a$ ratkaisu, ja z on tehtävän $x' = g(x)$, $x(0) = b$ ratkaisu.