

Differentiaaliyhtälöt, syksy 2000, laskuharjoitus 12

1. Hamottele tasoon vektorikentät joilla on seuraavanlaiset tasapainopisteet. Huomaa että on monenlaisia mahdollisuuksia.

- 3 satulaa, 1 nielu, 1 lähde
- 1 stabiili fokus, 2 epästabiilia fokusta, 1 nielu, 2 satulaa

2. Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{cases} x_1' = (1 - x_1 - x_2)x_1 \\ x_2' = (a - x_2 - 4a^2x_1)x_2 \end{cases}$$

missä $a > 0$. Tämä on eräs kilpailevien lajien malli: x_i kuvaa lajin i populaation kokoa. Mikä on tehtävän tila-avaruus? Analysoi tasapainopisteitä ja niiden laatua eri a :n arvoilla. Kuinka monta oleellisesti erilaista tapausta saat? (Vastaus: 5 eri tapausta joista 3 mielenkiintoista. Miksi 2 tapausta ei ole tärkeitä?). Hahmottele vektorikenttiä 3 mielenkiintoisessa tapauksessa. Erityisesti tutki onko jollain a :n arvolla todennäköistä että molemmat lajit säilyvät, vai kuoleeko toinen lajeista aina sukuputtoon.

3. Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -U'(x_1) \end{cases}$$

missä U on potentiaali. Tässä tapauksessa siis systeemin kokonaisenergia $H(x_1, x_2) = x_2^2/2 + U(x_1)$ pysyy vakiona ratkaisua pitkin eli H :n tasavokäyrät ovat systeemin ratoja. Hahmottele ratkaisuja seuraavissa tapauksissa.

- $U(x_1) = 3x_1 - x_1^3$
- $U(x_1) = -2x_1^2 + x_1^4$

Lisätään systeemiin kitkaa:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -U'(x_1) - ax_2 \end{cases}$$

missä $a > 0$. Miten systeemin käyttäytyminen muuttuu? Oletetaan että a on pieni parametri.