

Differentiaaliyhtälöt, syksy 2000, laskuharjoitus 2

1. Ohessa on annettu 8 suuntakenttää $a) - h)$ ja alla 8 difyhtälöä. Mitkä vastaavat toisiaan?

i) $x' = 2$

ii) $x' = t$

iii) $x' = x - t$

iv) $x' = x$

v) $x' = x/t$

vi) $x' = -t/x$

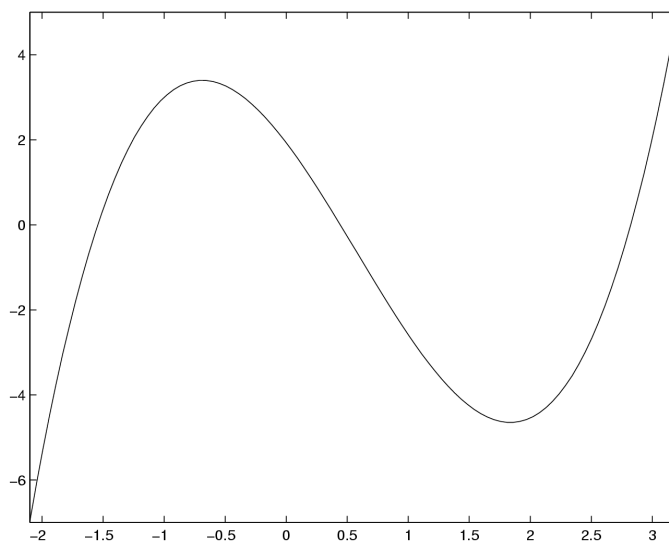
vii) $x' = (x - 2)/(t - 1)$

viii) $x' = tx^2 + t^2$

Piirrä kuviin nollaisokliini. Merkitse kuviin kohdat missä suuntakenttä ei ole määritelty.

2. Hahmottele suuntakenttää seuraavissa tapauksissa. Mitkä ovat isokliinit? Miten ratkaisut käyttäytyvät kun $t \rightarrow \infty$? Miten tämä riippuu alkuarvosta?

- $x' = f(t)$ ja f :n graafi on kuten kuvassa 1.
- $x' = f(x)$ ja f :n graafi on kuten kuvassa 1.

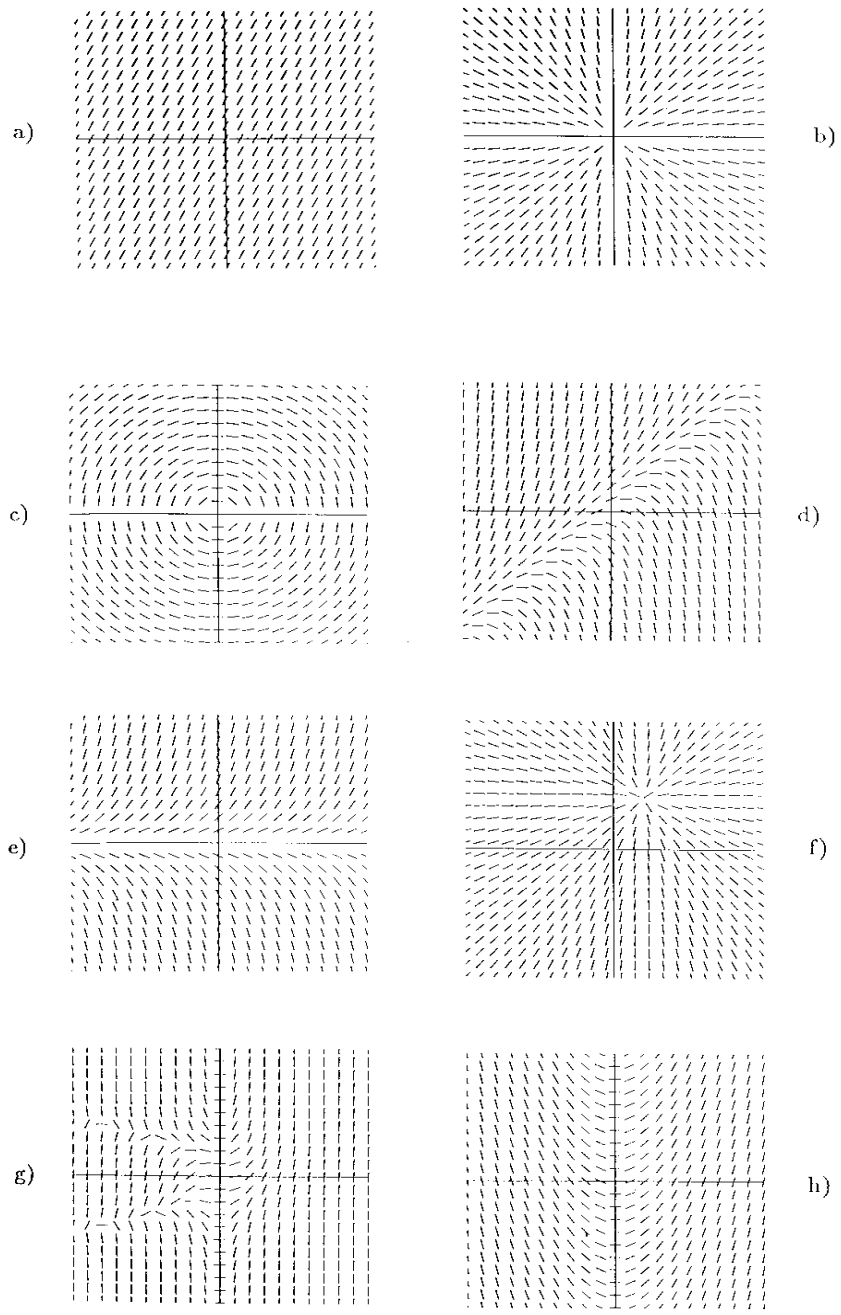


Kuva 1: Erään funktion graafi

3. Ratkaise muuttujien erotuksella difyhtälö $x' = (1 + x)/(1 - t)$.
4. Jos difyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $x' = f(x/t)$, niin se palautuu separoituvaksi sijoituksella $y(t) = x(t)/t$. Ratkaise tällä menetelmällä difyhtälö $x' = (t + x)/(t - x)$.
5. Mallitetaan kalapopulaation kokoa difyhtälöllä

$$x' = 0.4x(1 - x/10^5)$$

Hyödynnettäessä kaloja taloudellisesti voidaan ajatella seuraavia strategioita: kalastetaan joka vuosi vakiomäärä kalaa tai kalastetaan joka vuosi vakioprosentti sen hetkisestä populaatiosta. Ensimmäistä tapaus-ta voidaan mallittaa yhtälöllä $x' = 0.4x(1 - x/10^5) - a$ ja jälkimmäistä yhtälöllä $x' = 0.4x(1 - x/10^5) - bx$. Miten parametrit a ja b (eli kalas-tusmäärät) pitää valita, jos halutaan maksimoida kalasaaliit? Kumpi strategia on parempi ekologiselta kannalta? Entä taloudelliselta kan-nalta? Miksi?



Kuva 2: Suuntakentät