

## Differentiaaliyhtälöt, syksy 2000, laskuharjoitus 5

1. Ratkaise seuraavat difyhtälöt

- $x'' + 4x' + 3x = 0$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = -1$
- $x'' + 4x = 2t + 5e^{-3t}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$
- $x'' + 2x' + x = t$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 2$

2. Kirjoita oheisen jousisysteemin yhtälö. Oletetaan, että  $L_1 < 1$  ja  $L_2 < 1$ . Vihje: olkoon  $x(t)$  kappaleen keskipisteen paikka mitattuna vasemmasta seinästä. Mitä erityistä on pisteessä

$$p = \frac{k_1 L_1 + k_2(1 - L_2)}{k_1 + k_2}$$

Olkoon  $y(t) = x(t) - p$ . Kirjoita difyhtälö  $y$ :lle. Minkä ratkaisun saat  $x$ :lle kun  $k_d = 2$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 4$ ,  $L_1 = 2/3$  ja  $L_2 = 1/2$ ?

3. Ratkaise seuraavat yhtälöt. Esitä jokin järkevä arvio  $|x(t)|$ :n maksimille. Miten ratkaisut käyttäytyvät kun  $t$  on iso?

- $x'' + 9x = \cos(4t)$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$
- $x'' + 4x = \cos(2t)/5$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$
- $x'' + 2x' + 4x = 2\cos(2t)/5$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$

4. Pohdi seuraavia kysymyksiä 2. kertaluvun difyhtälöitten avulla.

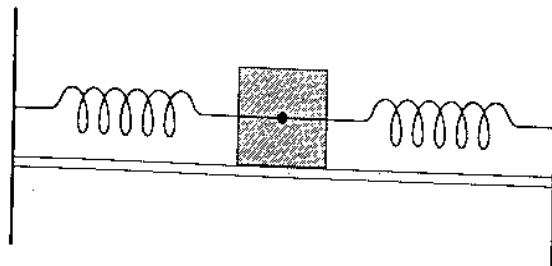
- Ne jotka ovat käyneet armeijan kenties tietävät ettei siltojen yli marssita tahdissa. Oheinen 'legenda' on samantyyppinen asia. Mistä näissä on kysymys?
- Oopperalaulaja pystyy rikkomaan tyhjän lasin laulamalla tietyn sävelen. Pitäisikö hänen laulaa korkeammalta vai matalammalta jos hän haluaisi rikkoa lasin joka on puolillaan vettä? Kumpi mahtaa olla helpompaa, tyhjän vai täyden lasin rikkominen?

5. Tarkastellaan tehtävää

$$x'' + ax' + bx = d \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0$$

missä  $a$ ,  $b$  ja  $d$  ovat positiivisia vakioita. Tulkitaan tilanne seuraavasti:  $x$  kuvaa systeemiä, joka alkuhetkellä on 'levossa', ja  $d$  on ohjausparametri. Oletetaan lisäksi että systeemiä voi 'säätää' eli että parametrit  $a$  ja  $b$  voidaan valita (suhteellisen) vapaasti. Koska ohjaus on rajallinen resurssi, niin  $d$  ei voi olla mielivaltaisen iso:  $d \leq d_*$ . Lisäksi systeemin toiminnan kannalta on välttämätöntä, että  $a \leq a_*$  ja  $b \leq b_*$ . Halutaan 'ajaa' systeemi tilaan 1 eli  $x(t) \rightarrow 1$  kun  $t \rightarrow \infty$ . Miten valitsisit parametrit  $a$ ,  $b$  ja  $d$  jos halutaan että  $x$  lähestyy lopputilaa mahdollisimman nopeasti? Yritä etsiä jotkin järkevät arvot.

consider a mass sliding on a frictionless table between two walls 1 unit apart and connected to both walls with springs, as shown below.



Let  $k_1$  and  $k_2$  be the spring constants of the left and right spring, respectively, let  $m$  be the mass, and let  $k_d$  be the damping coefficient of the medium the spring is sliding through. Suppose  $L_1$  and  $L_2$  are the rest lengths of the left and right springs, respectively.

12. Write a second-order differential equation for the position of the mass at time  $t$ .  
 [Hint: The first step is to pick an origin, that is, a point to set the position equal to 0. Halfway between the walls is a natural choice, but remember at this point the springs may be exerting forces, depending on their rest lengths.]
  
9. Legend has it that the marching band of a major university is forbidden from playing the song "Hey Jude". The reason is that whenever the band played this song, the fans would stomp their feet in time to the music and after the second chorus, the stadium structure would begin to rock quite noticeably. The administration insisted that there was no danger that the stadium would collapse, but banned the song as a precaution. No other song has this effect on the stadium (although, presumably, the fans will stomp to other songs).<sup>2</sup> Give a possible explanation of why the stadium structure reacted so violently to the stomping accompanying the song "Hey Jude" and to no other song?