**Differentiaaliyhtälöt, syksy 2000, laskuharjoitus 8**

1. Olkoon $u = (1, 2)$, $v = (-3, 1)$, $w = (4, 3)$ ja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Laske $u+v$, $-2w$, $\langle u, v\rangle$, $2A-B$, $Au$, $Bv$, $\langle Au, w\rangle$, $\langle u, A^T w\rangle$, tr$(A)$, tr$(B)$, $\det(A)$, $\det(B)$, $AB$, $BA$.

2. Olkoon $u$, $v$ ja $A$ kuten edellisessä tehtävässä, ja olkoon $x = Au$ ja $y = Av$. Olkoon $K_1$ kolmio jonka kärkipisteet ovat $u$, $v$ ja origo, ja $K_2$ kolmio jonka kärkipisteet ovat $x$, $y$ ja origo. Olkoon $m(K_1)$ kolmion $K_1$ pinta-ala ja $m(K_2)$ kolmion $K_2$ pinta-ala. Tarkista että $m(K_2) = \det(A)m(K_1)$.

3. Ratkaise difyhtälöt

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = (1, 1) \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = Bx \\ x(0) = (-2, 1/2) \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

   Laske siis ensin $A$:n ja $B$:n ominaisarvot ja -vektorit, joitten avulla sitten saat ratkaisun. Hahmottele $A$:n ja $B$:n määrittelemää vektorikenttää origon ympärillä. Miten ratkaisut käyttäytyvät kun $t \to \infty$ ?