

Differentiaaliyhtälöt, syksy 2000, laskuharjoitus 9

Harjoitukset pidetään luokassa M15. Myös 13. eli viimeinen harjoitus (viikko 49) pidetään luokassa M15.

Käynnistä *Matlab* ja anna sitten komento

```
cd d:\work\polking
```

Matlabin puolella voi käyriä piirtää seuraavasti. Halutaan esimerkiksi piirtää käyrä $x(t) = \sin(2t) - t^2$ välillä $[-1, 1.5]$. Tämä onnistuu seuraavilla käskyillä.

```
t=linspace(-1,1.5);  
x=sin(2*t)-t.^2;  
plot(t,x)
```

Komennoista saa lisää tietoa komennolla `help` : esimerkiksi `help plot`. Puolipiste estää tulostuksen näytölle. Huomaa piste potenssiinkorotusmerkin `^` edessä. Tämä tarkoittaa, että vektorin (tai jonon) `t` jokainen alkio korotetaan toiseen potenssiin. Kokeile vaikkapa seuraavia:

```
u=[1,2,3]  
v=[2,-1,4]  
u.*v  
u.^3  
plot(u,v)  
plot(u,v,'*')
```

Vaikka tällainen alkioittainen kertolasku ei puhtaassa matematiikassa ole kovinkaan hyödyllinen, niin numeerisessa laskennassa ja yleensä datan käsittelyssä se on erittäin käyttökelpoinen.

Olkoon $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$. Tällöin A :n karakteristinen polynomi on

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - (a_1 + a_4)\lambda + a_1a_4 - a_2a_3 = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

1. Tarkastellaan tehtävää $x' = Ax$ missä

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Käynnistä `pplane5` ja piirrä muutamia ratkaisuja. Käyrät tulevat siis (x_1, x_2) tasoon (ohjelmassa (x, y) taso). Voit myös piirtää x_1 :n ja/tai x_2 :n ajan funktiona valitsemalla valikosta `graph` sopivan vaihtoehdon. Tässä esimerkiksi origossa oleva tasapainopiste on satula. Ominaisvarauudet saat piirrettyä valitsemalla valikosta `solutions` vaihtoehdon `plot stable and unstable orbits`. Miksi ominaisvarauudet ovat lähinnä kiinnostavia satuloitten tapauksessa?

2. Tarkastellaan parametrissa c riippuvaa matriisia

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 10 + c & c \end{pmatrix}$$

ja tähän liittyvää difyhtälöä $x' = A_c x$.

- Nyt siis sekä jälki että determinantti riippuvat c :stä. Piirrä näin syntyvä käyrä jälki-determinantti – tasoon. Piirrä myös samaan kuvaan käyrä $\det = \text{tr}^2/4$. Sanottakoon tätä vaikkapa kriittiseksi parabeliksi.. Siis kriittinen parabeli vastaa niitä pisteitä joissa karakteristisella polynomilla on kaksinkertainen nollakohta.
- Käynnistä `pplane5` ja tutki difyhtälöä eri parametrien arvoilla. Mitä pisteitä nämä vastaa (tr, \det) – tasossa? Katso erityisesti pisteitten sijaintia kriittisen parabelin suhteen. Kuinka monta oleellisesti erilaista difyhtälöä saat?
- Matriisin ominaisarvot ja -vektorit saadaan komennolla `eig`. Kokeile seuraavaa:

```
ma=[1,2;3,-1]
[v,la]=eig(ma);
la=diag(la);
v1=v(:,1)
v2=v(:,2)
```

Nyt voit tarkistaa että $\text{la}(1)$ on vektoria v1 vastaava ominaisarvo. Ominaisvektoreita vastaavat suorat (eli ominaisvarauudet) voit piirtää vaikkapa seuraavasti:

```
s=linspace(-4,4);
x=s*v1(1);
y=s*v1(2);
plot(x,y)
```

Jotta saisit useita suoria samaan kuvaan käytä komentoa `hold on`. Mitent saamasi ominaisvaruudet näkyvät `pplane5`:llä piirtämässäsi kuvissa?

3. Analysoi samalla tavalla yhtälöitä $x' = B_c x$ ja $x' = D_c x$ missä

$$B_c = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & c \end{pmatrix} \quad D_c = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \cos(c) & \sin(c) \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$