1 Matriisilaskua $\mathbb{R}^2$:ssa

1.1 Vektorit

Lineaaristen difyhtälöitten analyysissä tarvitaan muutamia tietoja matriiseista, joten otetaan tässä esille tarvittavat asiat. Tarkastellaan lähinnä tasotapausta, mutta oikeastaan kaikki tässä tulevat asiat yleistyvät useampiulotteiseen tapaukseen. Toisin sanoen jos ymmärtää matriisilaskua ja difyhtälöitä $\mathbb{R}^2$:ssa, niin ymmärtää jo varsin paljon mitä tapahtuu $\mathbb{R}^n$:ssä.

Tason vektori esitetään muodossa $v = (v_1, v_2)$ missä siis v_1 ja v_2 ovat vektorin komponentit. Myös tason pistettä merkitään samoin $p = (p_1, p_2)$ vaikka piste ja vektori ovatkin geometrisesti erilaisia asioita. Pisteen tapauksessa yleensä sanotaan, että p_1 ja p_2 ovat pisteen koordinaatit. Vektoreita voidaan laskea yhteen: $u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2)$ ja kertoa vakiolla: $av = (av_1, av_2)$. Vektoreille voidaan myös määritellä *sisätulo* (muita nimityksiä: pistetulo, skalaaritulo): $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2$. Vektorit ovat *kohtisuorassa* (eli ortogonaalisia) jos $\langle u, v\rangle = 0$.

Vektorit u ja v ovat *lineaarisesti riippumattomia* jos ehdosta $c_1u + c_2v = 0$ välttämättä seuraa että $c_1 = c_2 = 0$. Jos vektorit eivät ole lineaarisesti riippumattomia, sanotaan että ne ovat lineaarisesti riippuvia.

1.2 Harjoitustehtäviä

1. Olkoon $u = (3, 4)$ ja $v = (-6, -8)$. Ovatko ne lineaarisesti riippumattomia?
2. Osoita, että jos kaksi vektoria on kohtisuorassa, niin ne ovat lineaarisesti riippumattomia.
3. Miten määrittelisit useamman vektorin lineaarisen riippumattomuuden/riippuvuuden? Osoita että tasossa mikä tahansa kolmen tai useamman vektorin joukko on lineaarisesti riippuva.
4. Todista Pythagoraan lause sisätulon avulla.

1.3 Matriisien algebra

Tarkastellaan seuraavaksi tason lineaarikuvauksia.

Määritelmä 1.1. *Kuvaus $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on lineaarinen jos se toteuttaa seuraavat ehdot.*

- $T(u + v) = Tu + Tv$ *kaikilla vektoreilla* u, v
- $T(cu) = cTu$ *kaikilla vektoreilla* u *ja kaikilla* $c \in \mathbb{R}$

cItse asiassa kaikki lineaarikuvaukset voidaan esittää seuraavassa muodossa

$$T \ : \ \begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_2 \\ y_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Siis lineaarikuvaus riippuu neljästä parametrista a, b, c ja d. Kun nämä kirjoitetaan taulukkoon, kutsutaan tulosta *matriisiksi*.

Määritelmä 1.2. *Olkoon*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A on 2×2 – matriisi, ja voidaan merkitä $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Nyt sitten määritellään matriisin ja vektorin kertolasku siten, että lopputulos on sama kuin lineaarikuvauksessa (1.1).

$$y = Ax \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_2 \\ y_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases}$$

Olkoon edelleen *nollamatriisi* sellainen matriisi jonka kaikki alkiot ovat nollia: yleensä merkitään lyhyesti $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Lisäksi *yksikkömatriisi* on $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Yksikkömatriisi siis vastaa identtistä kuvausta: $Ix = x$ kaikilla x. *Lävistäjämatriisi* (tai diagonaalimatriisi) on muotoa $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Matriiseja voidaan laskea yhteen ja niitä voi kertoa reaaliluvuilla aivan kuten vektoreitakin:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix} \qquad cA = \begin{pmatrix} ca_1 & ca_2 \\ ca_3 & ca_4 \end{pmatrix}$$

Edelleen voidaan helposti tarkistaa että $(A+B)v = Av+Bv$. Matriiseille voidaan myös määritellä kertolasku. Olkoon T ja S kaksi lineaarikuvausta, ja A ja B näitä vastaavat matriisit. Muodostetaan yhdistetty kuvaus $R = S \circ T$. Koska tämäkin on lineaarikuvaus, niin sitäkin vastaa jokin matriisi C. Määritellään siis matriisien kertolasku siten että $C = BA$. Helposti voidaan tarkistaa että tämä johtaa seuraaviin kaavoihin.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 = b_1 a_1 + b_2 a_3 \\ c_2 = b_1 a_2 + b_2 a_4 \\ c_3 = b_3 a_1 + b_4 a_3 \\ c_4 = b_3 a_2 + b_4 a_4 \end{cases}$$

Erityisesti siis huomataan että yleisesti ottaen $AB \neq BA$. Yksikkömatriisille pätee $AI = IA = A$ olipa A mikä tahansa. Joillakin matriiseilla on olemassa *käänteismatriisi*: A^{-1} on A:n käänteismatriisi jos $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Selvästi esimerkiksi nollamatriisilla ei voi olla käänteismatriisia.

Siis matriiseilla voidaan operoida paljon samaan tapaan kuin reaaliluvuilla paitsi että pitää muistaa että yleensä $AB \neq BA$ ja että käänteismatriisia ei välttämättä ole olemassa. Määritellään vielä matriisin *transpoosi*.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

1.4 Matriisien ominaisarvot ja -vektorit

Määritelmä 1.3. *Matriisin A determinantti ja jälki (trace):*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det(A) = ad - bc \qquad tr(A) = a + d$$

Määritelmä 1.4. *Matriisin A karakteristinen polynomi:*

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

Matriisin ominaisarvot (eigenvalues) ovat karakteristisen polynomin nollakohdat.

Edelleen nähdään että voidaan kirjoittaa

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

Olkoon p_A:n nollakohdat λ_1 ja λ_2. Toisen asteen polynomin ominaisuuksien perusteella siis saadaan

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A) =& a + d = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(A) =& ad - bc = \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

Lähes kaikki ylläolevat käsitteet tulevat käyttöön seuraavassa lausessa jota voisi pitää matriisilaskun peruslauseena. Muistetaan että väitteet V ja W ovat yhtäpitäviä eli ekvivalentteja, jos V:stä seuraa W ja W:stä seuraa V.

Lause 1.1. *Seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.*

- $\det(A) \neq 0$
- *yhtälöllä $Ax = b$, missä b on jokin tunnettu vektori, on täsmälleen yksi ratkaisu*
- *A^{-1} on olemassa*
- *A:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia*
- *A:n rivit ovat lineaarisesti riippumattomia*
- *nolla ei ole A:n ominaisarvo*

Tarkasteltaessa difyhtälöitä on yleensä syytä analysoida yhtälön tasapainopisteet. Lineaarisen difyhtälön $x' = Ax$ tapauksessa tasapainopisteitten joukolle pätee seuraava lause.

Lause 1.2. *Olkoon S yhtälön $Ax = 0$ ratkaisujoukko. Tällöin on kolme mahdollisuutta:*

(i) $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad S = \{0\}$.

(ii) A on nollamatriisi $\quad \Rightarrow \quad S = \mathbb{R}^2$

(iii) $\det(A) = 0$ *ja A ei ole nollamatriisi* $\quad \Rightarrow \quad$ *S on origon kautta kulkeva suora.*

Todistus. Tapaus (i) seuraa suoraan edellisestä lauseesta, ja tapaus (ii) on itsestäänselvä. Tapaus (iii) jätetään harjoitustehtäväksi. □

Tarkastellaan edelleen karakteristista polynomia $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Olkoon λ_* toinen ominaisarvoista ja olkoon $B_* = \lambda_* I - A$. Tällöin siis $\det(B_*) = \det(\lambda_* I - A) = 0$. Siispä peruslauseen 1.1 mukaan yhtälöllä $B_* v = 0$ on myös nollasta poikkeavia ratkaisuja. Yhtälö $B_* v = 0$ voidaan myös kirjoittaa muodossa $Av = \lambda_* v$. Asetetaan

Määritelmä 1.5. *Olkoon λ_* A:n ominaisarvo ja olkoon E_* yhtälön $Av = \lambda_* v$ ratkaisuvektoreitten joukko. E_* on ominaisavaruus (eigenspace) ja jokainen nollasta poikkeava ominaisavaruuden vektori on ominaisvektori (eigenvector).*

Siispä lauseen 1.2 perusteella näyttäisi siltä että ominaisavaruus on joko origon kautta kulkeva suora tai koko taso. Näin onkin jos ominaisarvo on reaalinen, mutta kuten tunnettua reaalisella polynomilla voi olla myös kompleksisia nollakohtia. Siis vaikka halutaan analysoida lähinnä reaalisia matriiseja ja niitten ominaisuuksia, niin väistämättä kompleksiluvut ja kompleksiset vektorit tulevat vastaan koska ominaisarvot ja -vektorit voivat olla kompleksisia.

Olkoon sitten λ_1 ja λ_2 A:n ominaisarvot ja oletetaan että ne ovat reaalisia ja että $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Olkoon edelleen E_1 ja E_2 vastaavat ominaisavaruudet. Tarvitaan seuraavaa tärkeää lausetta.

Lause 1.3. *Olkoon $u \in E_1$ ja $v \in E_2$. Tällöin u ja v ovat lineaarisesti riippumattomia.*

Todistus. Pitäisi siis näyttää että jos $c_1 u + c_2 v = 0$, niin välttämättä $c_1 = c_2 = 0$. Olkoon $B_1 = \lambda_1 I - A$; tällöin

$$
\begin{aligned}
&B_1(c_1 u + c_2 v) = c_1 B_1 u + c_2 B_1 v = \\
&c_1(\lambda_1 u - Au) + c_2(\lambda_1 v - Av) = c_2(\lambda_1 - \lambda_2) v = 0
\end{aligned}
$$

Nähdään siis että $c_2 = 0$. Vastaavasti kertomalla matriisilla $B_2 = \lambda_2 I - A$ nähdään että $c_1 = 0$. □

Entäpä se kompleksinen tapaus? Koska karakteristinen polynomi on reaalikertoiminen, niin tiedetään että tällöin kompleksiset nollakohdat esiintyvät liittolukupareina. Olkoon siis $\lambda_+ = a + bi$ ja $\lambda_- = a - bi$ eli siis $\lambda_+ = \bar{\lambda}_-$. Olkoon edelleen w jokin ominaisarvoa λ_+ vastaava ominaisvektori. w on siis kompleksinen vektori ja se voidaan siis kirjoittaa muodossa $w = u + vi$ missä u ja v ovat reaalisia vektoreita. Helposti woidaan tarkistaa että tällöin $\bar{w} = u - vi$ on ominaisarvoa λ_- vastaava ominaisvektori.

Lause 1.4. *Olkoon $\lambda = a + bi$ matriisin A kompleksinen ominaisarvo ja $w = u + vi$ sitä vastaava ominaisvektori. Tällöin u ja v ovat lineaarisesti riippumattomia.*

Todistus.

$$Aw = Au + iAv = (a + bi)(u + vi) = au - bv + (bu + av)i$$

Koska A on reaalinen niin

$$\begin{aligned} Au &= au - bv \\ Av &= bu + av \end{aligned}$$

Vastaoletus: löytyy vakiot c_1 ja c_2 siten että $c_1 u + c_2 v = 0$. Oletetaan että esimerkiksi $c_1 \neq 0$ jolloin siis $u = cv$ missä $c = -c_2/c_1$. Nyt siis

$$Au = au - bv = acv - bv = (ac - b)v$$

Toisaalta myös

$$Au = A(cv) = cAv = c(bu + av) = c(bcv + av) = (bc^2 + ac)v$$

Siispä $b(c^2 + 1)v = 0$ mikä on mahdotonta koska $c \in \mathbb{R}$ ja $b \neq 0$. $\square$

1.5 Harjoitustehtäviä

1. Todista lause 1.1, tai yritä ainakin vakuuttua siitä että se on totta.

2. Todista lauseen 1.2 kohta (*iii*).

3. Onko A:lla ja A^T:llä samat ominaisarvot? Entä ominaisvektorit?

4. Tarkista että

   $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix}$$

   Erityisesti siis $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

5. Mitkä ovat lävistäjämatriisin ominaisarvot ja -vektorit?

1.6 Similaarisuus

Todetaan ensin eräs determinantin tärkeä ominaisuus. Olkoon A jokin matriisi, jota vastaa siis jokin tason lineaarikuvaus. Jos kuvataan jotain tasojoukkoa A:lla, niin $\det(A)$ on kuvajoukon ja lähtöjoukon pinta-alojen suhde. Jos B on toinen matriisi, niin selvästi yhdistetyssä kuvauksessa BA pinta-alojen suhde saadaan kertomalla komponenttikuvausten suhteet eli

$$\det(BA) = \det(B)\det(A) \tag{1.2}$$

Tämän voi tietysti tarkistaan suoraan kirjoittamalla auki yhtälön vasen ja oikea puoli. Erityisesti koska $\det(I) = 1$, niin tästä seuraa että $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. Asetetaan sitten

Määritelmä 1.6. *Matriisit A ja B ovat similaareja jos on olemassa jokin matriisi M siten että $A = MBM^{-1}$.*

Lause 1.5. *Jos A ja B ovat similaareja, niin niillä on samat ominaisarvot.*

Todistus. Käyttämällä ominaisuutta (1.2) saadaan

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - MBM^{-1}) = \det(M\lambda IM^{-1} - MBM^{-1}) \\ &= \det(M(\lambda I - B)M^{-1}) = \det(M)\det(\lambda I - B)\det(M^{-1}) = \det(\lambda I - B) = p_B(\lambda) \end{aligned}$$

Siis koska A:lla ja B:llä on samat karakteristiset polynomit, niin niitten ominaisarvotkin ovat samat. $\square$

Seuraus 1.1. *Jos A ja B ovat similaareja, niin* $\det(A) = \det(B)$ *ja $tr(A) = tr(B)$.*

Todistus.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \lambda_1\lambda_2 = \det(B) \\ \operatorname{tr}(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(B) \end{aligned}$$

$\square$

Lause 1.6. *Olkoon matriisin A ominaisarvot reaalisia ja erisuuria. Tällöin A on similaarinen lävistäjämatriisin kanssa.*

Todistus. Olkoot ominaisarvot λ_1 ja λ_2 sekä näitä vastaavat ominaisvektorit u ja v. Määritellään

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

Lauseitten 1.1 ja 1.3 perusteella M^{-1} on olemassa. Mutta nyt on helppo tarkistaa että

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\square$

Lause 1.7. *Olkoon matriisilla A kompleksinen ominaisarvo $\lambda = a + bi$. Tällöin A on similaarinen matriisin $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ kanssa.*

Todistus. Olkoon λ:a vastaava ominaisvektori $w = u + vi$. Määritellään

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

Lauseitten 1.1 ja 1.4 perusteella M^{-1} on olemassa. Nyt voidaan tarkistaa että

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

□

Jäljellä on vielä tapaus jossa ominaisarvot ovat yhtäsuuret. Voidaan osoittaa

Lause 1.8. *Olkoon matriisilla A kaksinkertainen ominaisarvo λ. Tällöin A on similaarinen joko matriisin $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ tai matriisin $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ kanssa.*

Siis yhdistämällä ylläolevat lauseet saadaan että jokainen matriisi on similaarinen jonkun seuraavan matriisin kanssa.

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Näitä kutsutaan matriisin Jordanin perusmuodoiksi.

1.7 Harjoitustehtäviä

1. Tarkista että $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

2. Olkoon A:n molemmat ominaisarvot nollia. Onko A nollamatriisi?

1.8 Matriisin eksponentti

Muistetaan että eksponenttifunktio voidaan määritellä potenssisarjan avulla. Tätä voi käyttää matriisieksponentin määrittelemiseksi.

Määritelmä 1.7.

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Sovitaan että $A^0 = I$ olipa A mikä tahansa. Voidaan osoittaa että tämä sarja suppenee olipa A mikä tahansa. Todistus on käytännössä sama kuin reaalilukujen tapauksessa, mutta ei nyt puututa siihen. Katsotaan vain miten tämä potenssi voidaan eräissä tapauksissa laskea.

Lemma 1.1. *Olkoon* $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. *Tällöin* $e^A = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^d \end{pmatrix}$.

Todistus. Selvästi $A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix}$, joten

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a^k/k! & 0 \\ 0 & d^k/k! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} a^k/k! & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} d^k/k! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^d \end{pmatrix}$$

□

Erityisesti siis nollamatriisin eksponentti on yksikkömatriisi: $e^0 = I$. Huomattakoon vielä että vain lävistäjämatriisin tapauksessa matriisieksponentti saadaan ottamalla matriisin jokaisen alkion eksponentti.

Lemma 1.2. *Jos* $AB = BA$, *niin* $e^{A+B} = e^A e^B$.

Todistus. Jätetään harjoitustehtäväksi. Ideana on, että jos $AB = BA$, niin tällöin potenssisarjoilla voi operoida aivan kuten reaalilukujen tapauksessa. □

Seuraus 1.2.

- $I = e^{A-A} = e^A e^{-A} \quad \Rightarrow \quad \left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$
- $e^{\lambda I + A} = e^{\lambda I} e^A = e^{\lambda} e^A$

Määritelmä 1.8. *Matriisi on* nilpotentti *jos on olemassa* m *siten että* N^m *on nollamatriisi.*

Selvästi siis jos $N^m = 0$, niin myös $N^k = 0$ kaikille $k > m$. Siis nilpotentin matriisin eksponentti on äärellinen summa:

$$e^N = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{N^k}{k!}$$

Lause 1.9. *Jos* $A = MBM^{-1}$, *niin* $e^A = Me^B M^{-1}$.

Todistus. $A^k = (MBM^{-1})^k = MBM^{-1}MBM^{-1} \dots MBM^{-1} = MB^kM^{-1}$. Siispä

$$e^A = e^{MBM^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(MBM^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{MB^kM^{-1}}{k!} = M\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}\Big)M^{-1} = Me^BM^{-1}$$

□

Tämän lauseen avulla saadaan siis kaikkien matriisien eksponentit kunhan osataan laskea Jordanin perusmuotojen eksponentit (1.3). Lasketaan siis nämä.

Tapaus 1

Olkoon siis $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Lemman 1.1 mukaan tällöin $e^J = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$.

Tapaus 2

Olkoon $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Tällöin J voidaan kirjoittaa muodossa $J = aI + bR$ missä $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Siis lemman 1.2 mukaan $e^J = e^a e^{bR}$. Toisaalta helposti voidaan tarkistaa että $R^2 = -I$, $R^3 = -R$ ja $R^4 = I$. Siispä

$$\begin{aligned} e^{bR} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k R^k}{k!} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{2k!} \Big) I + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k+1}}{(2k+1)!} \Big) R \\ &= \cos(b) I + \sin(b) R = \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tästä siis saadaan

$$e^J = e^a e^{bR} = e^a \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$$

Tapaus 3

Olkoon $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ja olkoon $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tällöin siis $N^2 = 0$ joten $e^N = I + N$. Siispä

$$e^J = e^{\lambda I + N} = e^{\lambda I} e^N = e^{\lambda}(I + N) = e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.9 Algebrallinen yhteenveto

Yllä on siis tarkasteltu kahdenlaisia olioita, vektoreita ja matriiseja. Katsotaan vielä läpi mitä operaatioita niillä voidaan tehdä. Ensinnäkin vektorit:

(v.1) yhteenlasku: $u + v$

(v.2) vakiolla kertominen: cv

Joukkoa jossa on määritelty nämä laskutoimitukset sanotaan *vektoriavaruudeksi*. Mutta myös matriiseille on määritelty nämä laskutoimitukset, joten ne muodostavat myös vektoriavaruuden. Matriiseille on kuitenkin lisäksi määritelty

(m.1) kertolasku: AB (muistetaan että yleensä $AB \neq BA$)

(m.2) osittelulait: $A(B + C) = AB + AC$ ja $(A + B)C = AC + BC$

Joukkoa jossa on määritely yhteenlasku, kertolasku, ja jossa osittelulait ovat voimassa sanotaan *renkaaksi*. Lisäksi jos voidaan kertoa vakiolla on kyseessä *algebra*. Erityisesti siis matriisit muodostavat algebran, mutta kyllä matriisirenkaistakin puhutaan.

Lopuksi on vielä määritelty matriisien ja vektoreitten kertolasku. Näille pätee (l.1) $A(u+v) = Au + Av$

(l.2) $A(cv) = cAv$

(l.3) $(A+B)v = Av + Bv$

Kaksi ensimmäistä ehtoa siis sanoo että A on lineaarikuvaus.

2 Lineaariset difyhtälöt tasossa

2.1 Ratkaisun löytäminen

Tarkastellaan yhtälöä $x' = Ax$ ja yritetään löytää joitain ratkaisuja. Koska eksponenttifunktio osoittautui hyödylliseksi yhden yhtälön tapauksessa, niin kokeillaan sitä myös tässä: valitaan yritteeksi $x(t) = e^{\lambda t}v$ missä v on jokin vektori. Sijoittamalla yhtälöön saadaan

$$x' = \lambda e^{\lambda t}v = A\big(e^{\lambda t}v\big) = e^{\lambda t}Av$$

Koska $e^{\lambda t} \neq 0$, niin nähdään että x on ratkaisu jos λ on A:n ominaisarvo ja v vastaava ominaisvektori. Käytetään sitten hyväksi lineaarisuutta.

Lemma 2.1. *Olkoon y ja z tehtävän $x' = Ax$ ratkaisuja. Tällöin myös $x(t) = c_1 y(t) + c_2 z(t)$ on ratkaisu.*

Todistus.

$$x' = c_1 y' + c_2 z' = c_1 Ay + c_2 Az = A(c_1 y) + A(c_2 z) = A(c_1 y + c_2 z) = Ax$$

□

Alkuarvotehtävän ratkaisu etenee siis seuraavasti. Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = p \end{cases}$$

Tapaus 1: A:n ominaisarvot reaalisia ja erisuuria

Olkoon A:n ominaisarvot λ_1 ja λ_2, ja vastaavat ominaisvektorit u ja v. Edellisen lemman perusteella yleinen ratkaisu on siis

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}u + c_2 e^{\lambda_2 t}v$$

Olkoon edelleen $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ja $c = (c_1, c_2)$. Ratkaisu voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$x(t) = M \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} c = Me^{Jt}c$$

Alkuehdosta saadaan

$$x(0) = c_1 u + c_2 v = Mc = p$$

Koska u ja v ovat lineaarisesti riippumattomia, niin yhtälöllä $Mc = p$ on yksikäsitteinen ratkaisu: $c = M^{-1}p$. Tehtävän ratkaisu voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$x(t) = Me^{Jt}c = Me^{Jt}M^{-1}p = e^{MJM^{-1}t}p = e^{At}p$$

Tapaus 2: A:n ominaisarvot kompleksisia

Olkoon $\lambda = a + bi$ ominaisarvo ja $w = u + vi$ ominaisvektori. Tällöin tehtävällä $x' = Ax$ on kompleksinen ratkaisu $z(t) = e^{\lambda t}w$. Koska A on reaalinen, z:n reaali- ja imaginaariosat ovat riippumattomia reaalisia ratkaisuja.

$$\begin{aligned} z(t) =& e^{\lambda t}w = e^{(a+bi)t}(u+vi) = e^{at}\big(\cos(bt) + i\ \sin(bt)\big)\big(u+vi\big) \\ =& e^{at}\Big(u\cos(bt) - v\sin(bt) + i\big(v\cos(bt) + u\sin(bt)\big)\Big) \end{aligned}$$

Siis yleinen reaalinen ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$x(t) = c_1 e^{at}\big(u\cos(bt) - v\sin(bt)\big) + c_2 e^{at}\big(v\cos(bt) + u\sin(bt)\big)$$

Olkoon edelleen $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ ja $c = (c_1, c_2)$. Tällöin

$$e^{Jt} = e^{aIt+Bt} = e^{aIt}e^{Bt} = e^{at}\begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$$

Ratkaisu voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$x(t) = e^{at}M\begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}c = Me^{Jt}c$$

Siis jos alkuehto on $x(0) = p$, niin kuten ennenkin saadaan $c = M^{-1}p$ ja siis jälleen

$$x(t) = Me^{Jt}c = Me^{Jt}M^{-1}p = e^{MJM^{-1}t}p = e^{At}p$$

Tapaus 3: A:lla kaksinkertainen ominaisarvo

Olkoon λ A:n (ainoa) ominaisarvo ja E_λ vastaava ominaisavaruus. Tällöin pitää erottaa kaksi tapausta:

(i) E_λ on koko taso eli $\dim(E_\lambda) = 2$

(ii) E_λ on origon kautta kulkeva suora eli $\dim(E_\lambda) = 1$

Katsotaan ensin tapausta (i). Tällöin siis jokainen nollasta poikkeava vektori on ominaisvektori. Olkoon $u = (1,0)$, $v = (0,1)$ ja $c = (c_1, c_2)$. Yleinen ratkaisu on siis muotoa

$$x(t) = \big(c_1 u + c_2 v\big)e^{\lambda t} = e^{\lambda t} c$$

ja alkuehdosta $x(0) = p$ saadaan yksinkertaisesti $c = p$.

Sitten tapaus (ii). Olkoon u ominaisvektori. Tällöin siis $e^{\lambda t}u$ on eräs ratkaisu. Miten löydettäisiin toinen riippumaton ratkaisu? Kokeillaan polynomilla kertomista ja käytetään yritettä $x(t) = (v + wt)e^{\lambda t}$ missä v ja w ovat vektoreita. Sijoittamalla yhtälöön saadaan

$$x' = \lambda(v + wt)e^{\lambda t} + we^{\lambda t} = Ax = e^{\lambda t}Av + te^{\lambda t}Aw$$

Jotta tämä olisi totta kaikilla t niin pitää päteä

$$\begin{aligned} Aw &= \lambda w \\ Av &= \lambda v + w \end{aligned}$$

Siis w on ominaisvektori, ja voidaan valita $w = u$. v saadaan siis ratkaisemalla yhtälö $Av = \lambda v + u$. Tästä saadaan

Lemma 2.2. *u ja v ovat lineaarisesti riippumattomia.*

Todistus. Vastaoletus: $u = dv$. Tällöin $Av = \lambda v + dv = (\lambda + d)v$. Mutta tällöinhän myös $\lambda + d$ olisi ominaisarvo, mikä ei ole mahdollista koska λ on ainoa ominaisarvo. $\square$

Merkitään jälleen $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ja $c = (c_1, c_2)$ Yleinen ratkaisu voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t}u + c_2\big(v + ut\big)e^{\lambda t} = e^{\lambda t}M\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}c = Me^{Jt}c$$

Alkuehto $x(0) = Mc = p$ antaa jälleen $c = M^{-1}p$ ja edelleen $x(t) = e^{At}p$.

Siis kaikissa tapauksissa päädyttiin siihen että ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa $x(t) = e^{At}p$. Similaarisuutta ja Jordanin perusmuotoja tarvittiin jotta matriisieksponentti osattaisiin laskea.

2.2 Ratkaisujen luokittelu

Tarkastellaan yhtälöä $x' = Ax$. Tiedetään että A on similaarinen jonkin Jordanin perusmuodon kanssa. Olkoon siis $A = MJM^{-1}$ missä J on jokin kolmesta perustyypistä. Olkoon edelleen $y = M^{-1}x$; tällöin siis $y' = M^{-1}x' = M^{-1}Ax = M^{-1}MJM^{-1}x = Jy$. Siis riittää tarkastella 'kanonisia' systeemeitä $y' = Jy$ minkä jälkeen alkuperäisen tehtävän ratkaisu on $x = My$. Rajoitutaan seuraavassa tapaukseen $\det(A) \neq 0$, jolloin siis origo on systeemin ainoa tasapainopiste. Muistetaan edelleen että lauseen 1.1 perusteella nolla ei voi tällöin olla A:n ominaisarvo. Saadaan siis seuraavat tapaukset.

- Olkoon $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Tällöin

$$y(t) = \left(c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}\right)$$

  Voidaan erottaa kolme tapausta:

  1. $\lambda_1 < 0$ ja $\lambda_2 < 0$: origo on *nielu*.
  2. $\lambda_1 > 0$ ja $\lambda_2 > 0$: origo on *lähde*.
  3. λ_1 ja λ_2 ovat erimerkkisiä: origo on *satulapiste*.

- Olkoon $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Tällöin

$$y(t) = e^{at}\left(c_1 \cos(bt) - c_2 \sin(bt), c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt)\right)$$

  Voidaan erottaa kolme tapausta:

  1. $a < 0$: origo on *stabiili fokus*.
  2. $a > 0$: origo on *epästabiili fokus*.
  3. $a = 0$: origo on *keskus*.

- Olkoon $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Tällöin

$$y(t) = e^{\lambda t}\left(c_1 + c_2 t, c_2\right)$$

  Saadaan siis kaksi tapausta:

  1. $\lambda < 0$: origo on *degeneroitunut nielu*.
  2. $\lambda > 0$: origo on *degeneroitunut lähde*.

Saamme siis

Lause 2.1. *Seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.*

(i) *Yhtälön $x' = Ax$ kaikki ratkaisut lähestyvät origoa kun $t \to \infty$.*

(ii) *A:n molemmat ominaisarvot ovat negatiivisia (jos reaalisia) tai reaaliosaltaan negatiivisia (jos kompleksisia).*

2.3 Harjoitustehtäviä

1. Minkälaisia ratkaisuja on tehtävällä $x' = Ax$ kun $\det(A) = 0$?

2.4 Epähomogeeninen yhtälö

Tarkastellaan vielä tapausta

$$x' = Ax + f \tag{2.1}$$

missä siis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = \big(f_1(t), f_2(t)\big)$. Tämän ratkaisu etenee samoin kuin yhden yhtälön tapauksessa: ensin etsitään homogeenisen yhtälön $x' = Ax$ yleinen ratkaisu minkä jälkeen pyritään löytämään jokin epähomogeenisen yhtälön erityisratkaisu.

Tarkastellaan seuraavaa esimerkkiä:

$$x' = Ax + f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Olkoon edelleen $w = (1, 0)$ jolloin siis $f(t) = e^{2t}w$. A:n ominaisarvot ovat $\lambda_1 = -2$ ja $\lambda_2 = 3$, ja vastaavat ominaisvektorit $u = (1, 4)$ ja $\tilde{u} = (1, -1)$. Homogeenisen yhtälön $x' = Ax$ ratkaisu on siis

$$x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} u + c_2 e^{\lambda_2 t} \tilde{u} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Etsitään erityisratkaisua yritteellä $x_e(t) = e^{2t}v$, missä v on jokin tuntematon vektori. Siis

$$x_e' = 2e^{2t}v = Ax_e + f = e^{2t}Av + e^{2t}w$$

Tämän pitäisi siis pätee kaikilla t, joten saamme v:lle yhtälön

$$2v - Av = (2I - A)v = Aw \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koska 2 *ei* ole A:n ominaisarvo, niin v voidaan ratkaista. Aukikirjoitettuna yhtälö on

$$\begin{cases} v_2 = 1 \\ 4v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases}$$

Tästä helposti saadaan että $v = (-3/4, 1)$ ja lopulliseksi ratkaisuksi tulee siis

$$x(t) = x_h(t) + x_e(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Yhtälön (2.1) ratkaisu voidaan esittää myös seuraavasti:

$$x(t) = e^{At}c + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s) ds$$

Suoraan derivoimalla nähdään että tämä totettaa yhtälön (2.1). Tässä tarvitaan myös lemmaa 1.2 sen toteamiseen että $e^{A(t-s)} = e^{At}e^{-As}$. Jos sitten on alkuehto $x(t_0) = p$, niin ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}p + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s) ds$$

Käsin laskiessa tämä muoto on kuitenkin yleensä työläämpi kuin yllä esillä ollut yritemenettely. Toisaalta jos on käytössä symbolinen ohjelmisto, kuten *Maple* tai *Mathematica*, niin tällä tavalla saadaan ratkaisut systemaattisesti kaikilla f. Tietysti sillä varauksella että yleisesti ottaen syntyviä integraaleja ei kyetä alkeisfunktioitten avulla esittämään.

Matriisieksponentti on siis hyödyllinen teoreettinen käsite, mutta viime aikoina sitä on myös sovellettu difyhtälöitten numeerisessa laskennassa.

3 Epälineaarinen systeemi

Tarkastellaan vielä lopuksi epälineaarisia systeemejä:

$$x' = f(x) \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{3.1}$$

Oletetaan että f ei riipu suoraan ajasta, eli toisin sanoen tarkastellaan vain autonomisia systeemejä. Tarkoituksena on analysoida systeemin (3.1) käyttäytymistä tasapainopisteen ympäristössä.

Määritelmä 3.1. *Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. f:n differentiaali eli Jacobin matriisi on*

$$df = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 \end{pmatrix}$$

Merkintä df_p tarkoittaa df:n arvoa pisteessä p.

Differentiaalia tarvitaan moniulotteisen analyysin Taylorin kehitelmässä:

$$f(p+v) = f(p) + df_p v + O(|v|^2)$$

missä siis v on jokin vektori ja $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Merkintä $+O(|v|^2)$ luetaan: plus termejä joissa on $|v|^m$ missä $m \geq 2$. Siis kun $|v|$ on pieni, niin $f(p+v) \approx f(p) + df_p v$. Olkoon sitten p systeemin (3.1) tasapainopiste ja olkoon $y(t) = x(t) - p$. Tällöin

$$y' = x' = f(x) = f(p+y) = f(p) + df_p y + O(|y|^2) = df_p y + O(|y|^2)$$

Siis kun x on lähellä p:tä niin $y \approx 0$ ja $y' \approx df_p y$. Tässä on *linearisoinnin* idea: pyritään selvittämään systeemin käyttäytyminen p:n lähellä analysoimalla lineaarista systeemiä $z' = df_p z$.

Määritelmä 3.2. *Olkoon p yhtälön* (3.1) *tasapainopiste. Tällöin yhtälön* (3.1) *linearisoinnilla p:n ympäristössä tarkoitetaan lineaarista systeemiä $z' = df_p z$.*

Huomaa että df_p on vakiomatriisi, ja näitä vastaavien yhtälöitten ratkaisut tunnetaan. Haluttaisiin siis 'verrata' linearisoitua ja alkuperäistä systeemiä. Mutta miten tämä vertailu tarkkaan ottaen tapahtuu? Toisin sanoen minkä kriteerin perusteella voisi sanoa että kaksi systeemiä ovat 'oleellisesti' samoja? Seuraava määritelmä on osoittautunut käteväksi.

Tarkastellaan siis kahta systeemiä $x' = f(x)$ ja $y' = g(y)$. Olkoon $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x-p| < r\}$ ja $B_r(q) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid |y-q| < r\}$, missä p on f:n tasapainopiste ja q on g:n tasapainopiste.

Määritelmä 3.3. *Systeemit $x' = f(x)$ ja $y' = g(y)$ ovat ekvivalentteja, jos on olemassa jokin $r > 0$ ja kuvaus $h : B_r(p) \to B_r(q)$ siten että seuraavat ehdot pätevät*

- *h on jatkuva bijektio*
- *olkoon x_* alkuarvotehtävän $x' = f(x)$, $x(0) = a \in B_r(p)$ ratkaisu ja y_* alkuarvotehtävän $y' = g(y)$, $y(0) = h(a) \in B_r(q)$ ratkaisu. Tällöin $y_*(t) = h(x_*(t))$.*

Huomaa että erityisesti siis $h(p) = q$. Kuten arvata saattaa, niin linearisoitu ja alkuperäinen systeemi eivät aina ole ekvivalentteja. Kuitenkin hämmästyttävän usein ne ovat.

Määritelmä 3.4. *Tasapainopiste on hyperbolinen, jos linearisoidulla systeemillä ei ole ominaisarvoja imaginaariakselilla.*

Huomattakoon erityisesti että nolla sijaitsee imaginaariakselilla joten hyperbolisen tasapainopisteen tapauksessa $\det(df_p) \neq 0$. Siis tällöin linearisoidun systeemin ainoa tasapainopiste on origo.

Nyt voimmekin muotoilla *Grobmanin* ja *Hartmanin* lauseen.

Lause 3.1. *Jos p on hyperbolinen tasapainopiste niin alkuperäinen ja linearisoitu systeemi ovat ekvivalentteja.*

3.1 Hamiltonin systeemi

Tarkastellaan hiukkasta/massapistettä joka liikkuu voimakentässä suoraa pitkin. Hiukkasen paikka hetkellä t on $y(t)$. Oletetaan, että voima riippuu vain hiukkasen paikasta jolloin Newtonin laki voidaan kirjoittaa muodossa

$$my''(t) = F(y(t))$$

missä m on hiukkasen massa. Olkoon $m = 1$, ja kirjoitetaan yhtälö ensimmäisen kertaluvun systeeminä: $x_1 = y$, $x_2 = y'$, jolloin saadaan

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = F(x_1) \end{cases} \tag{3.2}$$

Oletetaan edelleen että voimakenttä tulee potentiaalista: $F(x_1) = -dU/dx_1$, missä siis U on potentiaali(funktio). Olkoon edelleen

$$H(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2} x_2^2 + U(x_1) \tag{3.3}$$

H:ta sanotaan Hamiltonin funktioksi tai hiukkasen kokonaisenergiaksi; termi $x_2^2/2$ on kineettinen energia. Näillä merkinnöillä systeemi (3.2) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{cases} x_1' = x_2 = \partial H/\partial x_2 \\ x_2' = -U'(x_1) = -\partial H/\partial x_1 \end{cases} \tag{3.4}$$

Tätä sanotaan Hamiltonin funktion H määräämäksi Hamiltonin systeemiksi. Näillä systeemeillä on seuraava merkittävä ominaisuus.

Lause 3.2. *Olkoon x systeemin* (3.4) *ratkaisu. Tällöin $H(x_1(t), x_2(t))$ ei riipu t:stä.*

Todistus.

$$\frac{d}{dt}H(x_1(t), x_2(t)) = \frac{\partial H}{\partial x_1}x_1'(t) + \frac{\partial H}{\partial x_2}x_2'(t) = \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_2}\Big(-\frac{\partial H}{\partial x_1}\Big) = 0$$

□

Siis hiukkasen energia pysyy vakiona; toisin sanoen H:n tasa-arvokäyrät ovat systeemin (3.4) ratoja.

Tarkastellaan sitten systeemin (3.4) tasapainopisteitä: nämä ovat pisteitä jossa $x_2 = 0$ ja $U'(x_1) = 0$. Muistetaan että derivaatan nollakohtia sanotaan kyseisen funktion *kriittisiksi pisteiksi*. Siis jokaista tasapainopistettä vastaa U:n kriittinen piste. Edelleen muistetaan että kriittinen piste a on (paikallinen) minimi jos $U''(a) > 0$ ja (paikallinen) maksimi jos $U''(a) < 0$.

Linearisoidaan systeemi (3.4) jossain tasapainopisteessä. Saatu lineaarinen systeemi on $z' = Az$ missä

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} \\ -\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} & -\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix}$$

Erityisesti siis huomataan että $\mathrm{tr}(A) = 0$ olipa H mikä tahansa. Toisin sanoen jos oletetaan että $\det(A) \neq 0$, niin linearisoitu systeemi on joko keskus tai satula. Kun edelleen rajoitutaan muotoa (3.3) olevaan Hamiltonin funktioon saadaan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(x_1) & 0 \end{pmatrix}$$

Siis $\det(A) = U''(x_1)$ mistä seuraa että jos tasapainopiste vastaa potentiaalin minimiä (maksimia) niin kyseessä on keskus (satula). Huomattakoon että keskus ei ole hyperbolinen tasapainopiste joten Grobmanin ja Hartmanin lauseen 3.1 perusteella ei voi vielä päätellä mitään. Voidaan kuitenkin erillisellä tarkastelulla osoittaa että Hamiltonin systeemien tapauksessa myös alkuperäisen systeemin tasapainopiste on keskuksen tyyppinen: sen ympärillä olevat radat muodostavat umpinaisia käyriä.