1. Muuttujien erotus

Tarkastellaan normaalimuodossa olevaa difyhtälöä

$$x'(t) = F(t, x(t)) \quad \text{lyhyesti} \quad x' = F(t, x)$$

missä siis $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sanotaan että yhtälö on *separoituva* jos se on muotoa

$$x' = g(x)/f(t) \tag{1}$$

Tällainen yhtälö voidaan ratkaista *muuttujien erotuksella* (tai 'integroimalla') seuraavasti. Kirjoitetaan $x' = dx/dt$ ikään kuin kyseessä olisi murtoluku ja esitetään (1) muodossa

$$\frac{dx}{g(x)} = \frac{dt}{f(t)}$$

Nyt siis muuttuja x on yhtälön vasemmalla ja muuttuja t oikealla puolella, mistä menetelmän nimi luonnollisesti tulee. Ratkaisu saadaan nyt jos funktiot $1/f$ ja $1/g$ kyetään integroimaan.

Esimerkki Olkoon $x' = 3t^2x^2$, jolloin $dx/x^2 = 3t^2dt$, mistä integroimalla saadaan $-1/x = t^3 - c$ ja edelleen $x(t) = 1/(c - t^3)$, missä siis c on mielivaltainen vakio.

2. Tasapainopisteet

Tarkastellaan difyhtälöä

$$x'(t) = f(x(t)) \quad \text{lyhyesti} \quad x' = f(x) \tag{2}$$

Tällaista yhtälöä sanotaan *autonomiseksi*, koska f ei riipu (suoraan) muuttujasta t. Sanotaan, että $p \in \mathbb{R}$ on difyhtälön (2) *tasapainopiste*, jos $f(p) = 0$. Nimitys tulee siitä että tällöin vakiofunktio $x(t) = p$ on yhtälön (2) ratkaisu. Tasapainopiste on p *nielu* (sink, attractor) jos on olemassa b siten että alkuarvotehtävän

$$x'(t) = f(x(t)) \qquad x(0) = a$$

ratkaisut lähestyvät p:tä kun $|a-p| < b$. Vastaavasti p on *lähde* (source, repellor), jos ratkaisut pyrkivät siitä poispäin.

Esimerkki Olkoon $x' = \sin(x)$, jolloin tasapainopisteet ovat $n\pi$. Koska sini on jaksollinen funktio on vain 2 oleellisesti erilaista tapausta: $p_1 = 0$ ja $p_2 = \pi$. Jos alkuarvo on välillä $0 < a < \pi$, niin $x'(a) > 0$ ja funktio x siis kasvaa eli menee poispäin origosta. Vastaavasti jos $-\pi < a < 0$ niin x vähenee. Siis p_1 on lähde. Vastaavanlaisella päättelyllä nähdään että p_2 on nielu.