1. Potenssisarjat

Potenssisarja määritellään seuraavasti:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n \tag{1}$$

Luvut a_n ovat potenssisarjan *kertoimet* ja t_0 on *kehityskeskus*. Olkoon edelleen

$$f_k(t) = \sum_{n=0}^{k} a_n (t - t_0)^n$$

joka on potenssisarjan k:s *osasumma*. Sanotaan, että potenssisarja *suppenee* jos raja-arvo $\lim_{k\to\infty} f_k(t)$ on olemassa. Jos raja-arvoa ei ole olemassa, niin sanotaan, että sarja *hajaantuu*. Kyseistä raja-arvoa merkitään sitten $f(t)$:llä. Siis (1) määritellään osasummien suppenemisen avulla. Potenssisarja ei välttämättä suppene kaikilla t. Voidaan kuitenkin osoittaa

Lause 1. *On olemassa $r \geq 0$ siten että potensssisarja* (1)

- *suppenee jos $t_0 - r < t < t_0 + r$*
- *hajaantuu jos $t < t_0 - r$ tai $t > t_0 + r$*

On siis mahdollista että $r = 0$ (jolloin sarja suppenee vain kun $t = t_0$) tai $r = \infty$ (jolloin sarja suppenee kaikilla t). r on nimeltään *suppenemissäde*. Sarjojen suppenemissädettä voidaan tutkia seuraavan lauseen avulla.

Lause 2.
- *(**juuritesti**) jos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$, niin $r = 1/\alpha$.*
- *(**suhdetesti**) jos $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \alpha$, niin $r = 1/\alpha$.*

Huomattakoon, että ylläolevien raja-arvojen ei välttämättä tarvitse olla olemassa, jolloin tarvitaan lisätyötä suppenemisen selvittämiseksi. Tämä kuitenkin riittää tämän kurssin tarpeisiin.

Esimerkki

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} t^n/n!$$

$$1/(1-t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, t^n$$

Ensimmäisessä tapauksessa $a_{n+1}/a_n = 1/(n+1) \to 0$, joten $r = \infty$. Toisessa $a_n = 1$ kaikilla n, joten $r = 1$. Kolmannessa $a_{n+1}/a_n = (n + 1) \to \infty$, joten $r = 0$.

2. Potenssisarjat ja difyhtälöt

Tarkastellaan tehtävää $x' = x$, $x(0) = 1$. Tämän ratkaisuhan on tunnetusti $x(t) = e^t$. Etsitään suoraan sarjamuotoista ratkaisua $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Alkuehdosta $x(0) = 1$ saadaan $a_0 = 1$. Edelleen derivoimalla termeittäin (tämä on sallittua potenssisarjojen tapauksessa) saadaan

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n = x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Saatiin siis

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Kaksi potennssisarjaa on yhtäsuuria vain jos niitten kaikki kertoimet ovat samoja. Siispä $a_{n+1} = a_n/(n+1)$, ja koska $a_0 = 1$, niin varsin helposti nähdään että $a_n = 1/n!$, niin kuin pitääkin.

Yleisesti ottaen jos on annettu tehtävä $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, niin tälle on olemassa suppeneva potenssisarjaratkaisu, jos f:lle on olemassa suppeneva potenssisarjaesitys. Potenssisarjoja käytetään lähinnä lineaarisissa tehtävissä, mutta joskus ne voivat olla hyödyllisiä myös epälineaarisessa tapauksessa. Tällöin pitää osata kertoa potenssisarjoja. Olkoon $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ ja asetetaan $h(t) = f(t)g(t)$. Tällöin

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \qquad \text{missä} \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$