1. MATRIISILASKUA $\mathbb{R}^2$:SSA

1.1. **Vektorit.** Lineaaristen difyhtälöitten analyysissä tarvitaan muutamia tietoja matriiseista, joten otetaan tässä esille tarvittavat asiat. Tarkastellaan lähinnä tasotapausta, mutta oikeastaan kaikki tässä tulevat asiat yleistyvät useampiulotteiseen tapaukseen. Toisin sanoen jos ymmärtää matriisilaskua ja difyhtälöitä $\mathbb{R}^2$:ssa, niin ymmärtää jo varsin paljon mitä tapahtuu $\mathbb{R}^n$:ssä.

Tason vektori esitetään muodossa $v = (v_1, v_2)$ missä siis v_1 ja v_2 ovat vektorin komponentit. Myös tason pistettä merkitään samoin $p = (p_1, p_2)$ vaikka piste ja vektori ovatkin geometrisesti erilaisia asioita. Pisteen tapauksessa yleensä sanotaan, että p_1 ja p_2 ovat pisteen koordinaatit. Vektoreita voidaan laskea yhteen: $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ ja kertoa vakiolla: $av = (av_1, av_2)$. Vektoreille voidaan myös määritellä *sisätulo* (muita nimityksiä: pistetulo, skalaaritulo): $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2$. Vektorit ovat *kohtisuorassa* (eli ortogonaalisia) jos $\langle u, v\rangle = 0$.

Vektorit u ja v ovat *lineaarisesti riippumattomia* jos ehdosta $c_1u + c_2v = 0$ välttämättä seuraa että $c_1 = c_2 = 0$. Jos vektorit eivät ole lineaarisesti riippumattomia, sanotaan että ne ovat lineaarisesti riippuvia.

1.2. **Harjoitustehtäviä.**

1. Olkoon $u = (3, 4)$ ja $v = (-6, -8)$. Ovatko ne lineaarisesti riippumattomia?
2. Osoita, että jos kaksi vektoria on kohtisuorassa, niin ne ovat lineaarisesti riippumattomia.
3. Miten määrittelisit useamman vektorin lineaarisen riippumattomuuden/riippuvuuden? Osoita että tasossa mikä tahansa kolmen tai useamman vektorin joukko on lineaarisesti riippuva.
4. Todista Pythagoraan lause sisätulon avulla.

1.3. **Matriisien algebra.** Tarkastellaan seuraavaksi tason lineaarikuvauksia.

Määritelmä 1. *Kuvaus $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on lineaarinen jos se toteuttaa seuraavat ehdot.*

- $T(u + v) = Tu + Tv$ *kaikilla vektoreilla* u, v
- $T(cu) = cTu$ *kaikilla vektoreilla* u *ja kaikilla* $c \in \mathbb{R}$

Itse asiassa kaikki lineaarikuvaukset voidaan esittää seuraavassa muodossa

$$T : \begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_2 \\ y_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases} \tag{1}$$

Siis lineaarikuvaus riippuu neljästä parametrista a, b, c ja d. Kun nämä kirjoitetaan taulukkoon, kutsutaan tulosta *matriisiksi*.

Määritelmä 2. *Olkoon*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A *on* 2×2 *– matriisi, ja voidaan merkitä* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Nyt sitten määritellään matriisin ja vektorin kertolasku siten, että lopputulos on sama kuin lineaarikuvauksessa (1).

$$y = Ax \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_2 \\ y_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases}$$

Olkoon edelleen *nollamatriisi* sellainen matriisi jonka kaikki alkiot ovat nollia: yleensä merkitään lyhyesti $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Lisäksi *yksikkömatriisi* on $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Yksikkömatriisi siis vastaa identtistä kuvausta: $Ix = x$ kaikilla x.

Matriiseja voidaan laskea yhteen ja niitä voi kertoa reaaliluvuilla aivan kuten vektoreitakin:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix} \qquad cA = \begin{pmatrix} ca_1 & ca_2 \\ ca_3 & ca_4 \end{pmatrix}$$

Edelleen voidaan helposti tarkistaa että $(A + B)v = Av + Bv$. Matriiseille voidaan myös määritellä kertolasku. Olkoon T ja S kaksi lineaarikuvausta, ja A ja B näitä vastaavat matriisit. Muodostetaan yhdistetty kuvaus $R = S \circ T$. Koska tämäkin on lineaarikuvaus, niin sitäkin vastaa jokin matriisi C. Määritellään siis matriisien kertolasku siten että $C = BA$. Helposti voidaan tarkistaa että tämä johtaa seuraaviin kaavoihin.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 = b_1 a_1 + b_2 a_3 \\ c_2 = b_1 a_2 + b_2 a_4 \\ c_3 = b_3 a_1 + b_4 a_3 \\ c_4 = b_3 a_2 + b_4 a_4 \end{cases}$$

Erityisesti siis huomataan että yleisesti ottaen $AB \neq BA$. Yksikkömatriisille pätee $AI = IA = A$ olipa A mikä tahansa. Joillakin matriiseilla on olemassa *käänteismatriisi*: A^{-1} on A:n käänteismatriisi jos $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Selvästi esimerkiksi nollamatriisilla ei voi olla käänteismatriisia.

Siis matriiseilla voidaan operoida paljon samaan tapaan kuin reaaliluvuilla paitsi että pitää muistaa että yleensä $AB \neq BA$ ja että käänteismatriisia ei välttämättä ole olemassa. Määritellään vielä matriisin *transpoosi*.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

1.4. **Matriisien ominaisarvot ja -vektorit.**

Määritelmä 3. *Matriisin A determinantti ja jälki (trace):*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det(A) = ad - bc \qquad tr(A) = a + d$$

Määritelmä 4. *Matriisin A karakteristinen polynomi:*

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

Matriisin ominaisarvot (eigenvalues) ovat karakteristisen polynomin nollakohdat.

Edelleen nähdään että voidaan kirjoittaa

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

Olkoon p_A:n nollakohdat λ_1 ja λ_2. Toisen asteen polynomin ominaisuuksien perusteella siis saadaan

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A) =& a + d = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(A) =& ad - bc = \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

Lähes kaikki ylläolevat käsitteet tulevat käyttöön seuraavassa lausessa jota voisi pitää matriisilaskun peruslauseena. Muistetaan että väitteet V ja W ovat yhtäpitäviä eli ekvivalentteja, jos V:stä seuraa W ja W:stä seuraa V.

Lause 1. *Seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.*

- $\det(A) \neq 0$
- *yhtälöllä $Ax = b$, missä b on jokin tunnettu vektori, on täsmälleen yksi ratkaisu*
- A^{-1} *on olemassa*
- A*:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia*
- A*:n rivit ovat lineaarisesti riippumattomia*
- *nolla ei ole* A*:n ominaisarvo*

Tarkasteltaessa difyhtälöitä on yleensä syytä analysoida yhtälön tasapainopisteet. Lineaarisen difyhtälön $x' = Ax$ tapauksessa tasapainopisteitten joukolle pätee seuraava lause.

Lause 2. *Olkoon S yhtälön $Ax = 0$ ratkaisujoukko. Tällöin on kolme mahdollisuutta:*

(i) $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad S = \{0\}$.
(ii) *A on nollamatriisi* $\quad \Rightarrow \quad S = \mathbb{R}^2$
(iii) $\det(A) = 0$ *ja A ei ole nollamatriisi* $\quad \Rightarrow \quad$ *S on origon kautta kulkeva suora.*

Todistus. Tapaus (i) seuraa suoraan edellisestä lauseesta, ja tapaus (ii) on itsestäänselvä. Tapaus (iii) jätetään harjoitustehtäväksi. □

Tarkastellaan edelleen karakteristista polynomia $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Olkoon λ_* toinen ominaisarvoista ja olkoon $B_* = \lambda_* I - A$. Tällöin siis $\det(B_*) = \det(\lambda_* I - A) = 0$. Siispä peruslauseen 1 mukaan yhtälöllä $B_* v = 0$ on myös nollasta poikkeavia ratkaisuja. Yhtälö $B_* v = 0$ voidaan myös kirjoittaa muodossa $Av = \lambda_* v$. Asetetaan

Määritelmä 5. *Olkoon λ_* A:n ominaisarvo ja olkoon E_* yhtälön $Av = \lambda_* v$ ratkaisuvektoreitten joukko. E_* on ominaisavaruus (eigenspace) ja jokainen nollasta poikkeava ominaisavaruuden vektori on ominaisvektori (eigenvector).*

Siispä lauseen 2 perusteella näyttäisi siltä että ominaisavaruus on joko origon kautta kulkeva suora tai koko taso. Näin onkin jos ominaisarvo on reaalinen, mutta kuten tunnettua reaalisella polynomilla voi olla myös kompleksisia nollakohtia. Siis vaikka halutaan analysoida lähinnä reaalisia matriiseja ja niitten ominaisuuksia, niin väistämättä kompleksiluvut ja kompleksiset vektorit tulevat vastaan koska ominaisarvot ja -vektorit voivat olla kompleksisia.

Olkoon sitten λ_1 ja λ_2 A:n ominaisarvot ja oletetaan että ne ovat reaalisia ja että $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Olkoon edelleen E_1 ja E_2 vastaavat ominaisavaruudet. Tarvitaan seuraavaa tärkeää lausetta.

Lause 3. *Olkoon $u \in E_1$ ja $v \in E_2$. Tällöin u ja v ovat lineaarisesti riippumattomia.*

Todistus. Pitäisi siis näyttää että jos $c_1 u + c_2 v = 0$, niin välttämättä $c_1 = c_2 = 0$. Olkoon $B_1 = \lambda_1 I - A$; tällöin

$$B_1(c_1 u + c_2 v) = c_1 B_1 u + c_2 B_1 v =$$
$$c_1(\lambda_1 u - Au) + c_2(\lambda_1 v - Av) = c_2(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$$

Nähdään siis että $c_2 = 0$. Vastaavasti kertomalla matriisilla $B_2 = \lambda_2 I - A$ nähdään että $c_1 = 0$. □

Entäpä se kompleksinen tapaus? Koska karakteristinen polynomi on reaalikertoiminen, niin tiedetään että tällöin kompleksiset nollakohdat esiintyvät liittolukupareina. Olkoon siis $\lambda_+ = a + bi$ ja $\lambda_- = a - bi$ eli siis $\lambda_+ = \bar{\lambda}_-$. Olkoon edelleen w jokin ominaisarvoa λ_+ vastaava ominaisvektori. w on siis kompleksinen vektori ja se voidaan siis kirjoittaa muodossa $w = u + vi$ missä u ja v ovat reaalisia vektoreita. Helposti woidaan tarkistaa että tällöin $\bar{w} = u - vi$ on ominaisarvoa λ_- vastaava ominaisvektori.

Lause 4. *Olkoon $\lambda = a + bi$ matriisin A kompleksinen ominaisarvoja $w = u + vi$ sitä vastaava ominaisvektori. Tällöin u ja v ovat lineaarisesti riippumattomia.*

Todistus.

$$Aw = Au + iAv = (a + bi)(u + vi) = au - bv + (bu + av)i$$

Koska A on reaalinen niin

$$\begin{aligned} Au &= au - bv \\ Av &= bu + av \end{aligned}$$

Vastaoletus: löytyy vakiot c_1 ja c_2 siten että $c_1 u + c_2 v = 0$. Oletetaan että esimerkiksi $c_1 \neq 0$ jolloin siis $u = cv$ missä $c = -c_2/c_1$. Nyt siis

$$Au = au - bv = acv - bv = (ac - b)v$$

Toisaalta myös

$$Au = A(cv) = cAv = c(bu + av) = c(bcv + av) = (bc^2 + ac)v$$

Siispä $b(c^2 + 1)v = 0$ mikä on mahdotonta koska $c \in \mathbb{R}$ ja $b \neq 0$. $\square$

1.5. **Harjoitustehtäviä.**

1. Todista lause 1, tai yritä ainakin vakuuttua siitä että se on totta.
2. Todista lauseen 2 kohta (iii).
3. Onko A:lla ja A^T:llä samat ominaisarvot? Entä ominaisvektorit?
4. Tarkista että

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix}$$