

Differentiaaliyhtälöt 5.9.2002

Demot/vko 37

1. Logistisen populaatiomallin $p'(t) = ap(t) - bp(t)^2$, $p(t_0) = p_0$, ratkaisu voidaan kirjoittaa

$$a(t - t_0) = \log \frac{p(t)}{p_0} \left| \frac{a - bp_0}{a - bp(t)} \right|. \quad (\star)$$

Osoita ensin, että $\frac{a - bp_0}{a - bp(t)}$ on aina > 0 , joten itseisarvot voidaan poistaa. Totea sitten, että (\star) todella on populaatioyhtälön ratkaisu.

2. Käytä luennolla esitettyjä väestölukuja (liite) apuna logistisen populaatiomallin vakioiden määrittämiseksi maapallon väkilukumallille. Mikä tulisi olemaan näin saadun mallin mukainen kokonaisväkiluvun raja-arvo, kun $t \rightarrow \infty$.
3. Tarkastellaan liikemallia (keihäänheitto!)

$$\begin{cases} x'' = -0,2x', & x(0) = 0, & x'(0) = \alpha > 0 \\ y'' = -10 - 0,2y', & y(0) = 0, & y'(0) = \beta > 0 \end{cases}$$

olettaen, että $\alpha^2 + \beta^2 = A^2 =$ alkunopeuden neliö. Määrää alkunopeus (ja lähtökulma) siten, että heiton pituudeksi tulee 80 (metriä). Käytä tarvittaessa tietokonetta apuna.

4. Tutki edellisen tehtävän mallissa lähtökulman ja alastulokulman suhdetta toisiinsa. Käytä jälleen tarvittaessa tietokonetta apuna.