

## Differentiaaliyhtälöt sl. 2002

Demot/vko 44

1. Osoita, että funktiot  $e^x$ ,  $xe^x$ ,  $x^2e^x$  ovat lineaarisesti riippumattomia funktioluokassa  $\mathcal{C}(-\infty, \infty)$ .
2. Osoita myös, että funktiot  $\sin x$ ,  $\sin 2x$ ,  $\sin 3x$  ovat lineaarisesti riippumattomia funktioluokassa  $\mathcal{C}(-\infty, \infty)$ .
3. Esitä seuraavat operaattoriyhtälöt tavallisessa differentiaaliyhtälömuodossa:

(a)  $(D - 2x)(x^2D + 2x)y = 0$ ,

(b)  $(2xD + 1)(D - 1)y = 0$ ,

(c)  $(D - \alpha)^2y = 0$ ,

(d)  $(D^2 + \alpha^2)^2y = 0$ ,

Yritä myös keksiä yhtälöille ratkaisut.

4. Etsi epähomogeenisen differentiaaliyhtälön

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x)$$

erikoisratkaisu, kun

(a)  $h$  ja  $a_0$  ovat vakioita,

(b)  $h(x) = mx + b$ ,  $m, b \in \mathbb{R}$ ,  $a_0, a_1$  ovat vakioita ja  $a_0 \neq 0$ ,

(c)  $h(x) = mx$ ,  $a_0 = 0$  ja  $a_1 \neq 0$  on vakio.

5. Olkoon  $L$  lineaarinen differentiaalioperaattori välillä  $I \subset \mathbb{R}$  ja oletetaan, että  $y_1$ , vast.  $y_2$ , on yhtälön  $Ly = h_1$ ,  $Ly = h_2$ , ratkaisu. Osoita, että  $y_1 + y_2$  on yhtälön  $Ly = h_1 + h_2$  ratkaisu.

6. Osoita, että

$$(xD)(x^3D^3) = (x^3D^3)(xD).$$