

## Differentiaaliyhtälöt sl. 2002

Demot/vko 45

1. Laske  $W(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma)$ , kun  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Käytä tätä hyväksi osoittamaan, että funktiot  $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma$  ovat lineaarisesti riippumattomia funktioluokassa  $\mathcal{C}(0, \infty)$  jos ja vain jos ne ovat lineaarisesti riippumattomia luokassa  $\mathcal{C}(I)$  jokaiselle osavälille  $I \subset (0, \infty)$ .
2. Laske  $W(e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x})$ . Millä ehdolla determinantti häviää?
3. Differentiaaliyhtälöllä

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

on polynomiratkaisu. Etsi tämä ja ratkaise yhtälö sitten täydellisesti Abelin kaavan avulla.

4. Olkoon  $E(x)$  alkuarvotehtävän

$$y' - y = 0, \quad y(0) = 1$$

yksikäsitteinen ratkaisu reaaliakselilla  $\mathbb{R}$ . Osoita ratkaisematta yhtälöä, että

- (a)  $E(x)$  on äärettömän monesti derivoituva ja  $E^{(n)}(x) = E(x)$  jokaiselle  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b)  $E(x) > 0$  jokaiselle  $x \in (0, +\infty)$ .
- (c)  $E(x)$  on aidosti kasvava välillä  $(0, +\infty)$ .
- (d)  $E(a + b) = E(a)E(b)$  jokaiselle  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- (e)  $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$  jokaiselle  $x \in \mathbb{R}$ .
- (f)  $0 < E(x) < 1$  jokaiselle  $x \in (-\infty, 0)$ .
- (g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} E(x) = 0$ .
- (h) Määritellään  $e := E(1)$ . Osoita, että  $E(n) = e^n$  jokaiselle  $n \in \mathbb{N}$ .