Differentiaaligeometria, syksy 2002

Harjoitustehtäviä 2

1. Tarkista, että evoluutta ja normaalien verhokäyrä todellakin on sama asia. Tarkastele ainakin tapausta, jossa käyrä on annettu muodossa $y = f(x)$.

2. Olkoon tasokäyrä annettu muodossa $f(x, y) = 0$. Johda kaarevuudelle lauseke tässä tapauksessa. Mikä on käyrän $y^2 - x^3 - 2xy^2 - 1 = 0$ kaarevuus? Piirrä kuva.

   Vihje: implisiittifunktiolause. Vastaus:

   $$\kappa = \pm \frac{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{|\nabla f|^3}$$

   Tässä siis f_x on osittaisderivaatta x:n suhteen jne. Vastaus voidaan esittää myös seuraavasti. Muistetaan, että ∇f on käyrän normaali, joten yksikkötangentti on $t = \big(f_y, -f_x\big)/|\nabla f|$. Määritellään vielä f:n toinen differentiaali eli Hessin matriisi:

   $$d^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

   Näillä merkinnöillä kaarevuuden lausekkeeksi tulee

   $$\kappa = \pm \frac{\langle t, d^2 f \ t \rangle}{|\nabla f|}$$

3. Yleistetty ruuviviiva on käyrä jonka tangentti on vakiokulmassa annettuun suuntaan nähden. Sanotaan tätä suuntaa ruuviviivan akseliksi. Siis jos on annettu akselin suuntainen yksikkövektori v, ja käytetään kaarenpituusparametriä, niin

   $$\langle t(s), v \rangle = \cos(\alpha)$$

   missä α on vakio. Näytä, että yleistetylle ruuviviivalle pätee:

   $$\kappa(s)/\tau(s) = \tan(\alpha)$$

4. Laske κ ja τ seuraavalle käyrälle:

   $$c(u) = \big(3u - u^3, 3u^2, 3u + u^3\big)$$

   Totea, että kyseessä on yleistetty ruuviviiva. Mikä on tässä ruuviviivan akseli? Piirrä kuva.

5. Miten kuvaisit jäykän kappaleen liikettä kvaternioiden avulla? Tätä on viime aikoina käytetty yhä enemmän esimerkiksi robotiikassa, koska ongelman muotoilu kvaternioilla johtaa numeeristen laskujen kannalta parempaan systeemiin kuin perinteinen malli pyörähdysakselin avulla.

6. Määritä käyrä, jolla $\kappa(s) = \tau(s) = 1/s$.