Differentiaaligeometria, syksy 2002

Harjoitustehtäviä 4

Kerrataan taas muutamia merkintöjä. Pyörähdyspinta on pinta joka on annettu muodossa

$$f(s,\theta) = \Big(c_1(s)\cos(\theta), c_1(s)\sin(\theta), c_2(s)\Big)$$

missä tasokäyrää $c(s) = \big(c_1(s), c_2(s)\big)$ sanotaan pyörähdyspinnan profiiliksi. Pinnan keskikaarevuus on

$$H = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(W) = \tfrac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)$$

missä k_1 ja k_2 ovat pääkaarevuudet.

1. Etsi pyörähdyskappaleet, joille kaarevuus $K = -1$. Erästä näistä ratkaisuista sanotaan pseudopalloksi. Sen profiili on traktrix.

2. Katenoidi on pyörähdyskappale, jonka profiili on $y = \cosh(x)$. Näytä, että katenoidi on ainoa pyörähdyskappale, jolle $H = 0$ ja $K \neq 0$.

3. Näytä, että jos asymptoottiset suunnat ovat ortogonaalisia, niin $H = 0$. Yleisesti ottaen osoita, että jos α on asymptoottisten suuntien välinen kulma, niin
$$\cos(\alpha) = \frac{|k_1 + k_2|}{k_1 - k_2}$$
missä $k_2 < 0 < k_1$ ovat pääkaarevuudet.

4. Olkoon $f : \Omega \to M \subset \mathbb{R}^3$ pinnan parametrisointi ja tarkastellaan parametrikäyriä
$$c_\alpha(s) = f(\alpha, s)$$
$$d_\beta(s) = f(s, \beta)$$
Tarkista seuraavat asiat:
   - parametrikäyrät leikkaavat kohtisuorasti, jos $F = 0$
   - parametrikäyrät ovat kaarevuuskäyriä, jos $\tilde{F} = F = 0$.
   - parametrikäyrät ovat asymptoottisia käyriä, jos $\tilde{E} = \tilde{G} = 0$.

5. Etsi ellipsoidin napapisteet. Ohje: Ellipsoidi $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ voidaan parametrisoida kuvauksella

$$f(\theta, \varphi) = \Big(a\cos(\theta)\cos(\varphi), b\sin(\theta)\cos(\varphi), c\sin(\varphi)\Big)$$

Olkoon vaikkapa $a \geq b \geq c > 0$. Miten tilanne muuttuu tapauksissa (i) $a > b > c$ (ii) $a > b = c$ (iii) $a = b > c$? Tapaus $a = b = c$ on pallo, jolloin kaikki pisteet ovat napapisteitä.

Jokaisella ellipsoidilla on olemassa tasoja, joitten leikkaus ellipsoidin kanssa on ympyrä. Napapisteen tangenttitaso on yhdensuuntainen tällaisen tason kanssa.

6. Tarkastellaan hyperboloidia $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$. Näytä, että tämä on itse asiassa viivotinpinta.

7. Olkoon $M \subset \mathbb{R}^3$ pinta ja ν Gaussin kuvaus. Määritellään kuvaus $g : M \to \mathbb{R}$ seuraavasti: $g(p) = \langle p, \nu(p) \rangle$.

   - Näytä, että $|g(p)|$ on origon etäisyys T_pM:stä.
   - Mikä on g, kun M on edellisen tehtävän hyperboloidi?
   - Näytä, että edellisen tehtävän hyperboloidin kaarevuus voidaan lausua muodossa
   $$K(p) = -\frac{|g(p)|^4}{a^2b^2c^2}$$