Differentiaaligeometria, syksy 2002

Harjoitustehtäviä 6

$$
\begin{aligned}
\mathbb{GL}(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) \neq 0\} \\
\mathbb{SL}(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) = 1\} \\
\mathbb{O}(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t A = I\} \\
\mathbb{SO}(n) &= \mathbb{O}(n) \cap \mathbb{SL}(n) \\
\mathfrak{sl}(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{tr}(A) = 0\} \\
\mathfrak{so}(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t = -A\}
\end{aligned}
$$

Olkoon S joukko. $\sim$ on ekvivalenssirelaatio joukossa S jos

- $a \sim a$ kaikilla $a \in S$
- $a \sim b \quad \Rightarrow \quad b \sim a$ kaikilla a, $b \in S$
- $a \sim b$ ja $b \sim c \quad \Rightarrow \quad a \sim c$ kaikilla a, b, $c \in S$

1. Olkoon $M(n \times n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ kaikkien $n \times n$ matriisien joukko. Näytä, että $\mathbb{SL}(n)$ on $M(n \times n)$:n $n^2 - 1$ – ulotteinen alimonisto.

   Ohje: kuvaus $\det\, :\, M(n \times n) \simeq \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ on sileä. Pitää siis tarkistaa, että 1 on sen säännöllinen arvo.

2. Olkoon M n–ulotteinen monisto, $p \in M$ ja

   $$\mathcal{K}_p(M) = \{c\, :\, \mathbb{R} \to M \mid c(0) = p\}$$

   Luennoilla määriteltiin: $c \sim d$ jos on olemassa kartta (x, U) siten, että $p \in U$ ja

   $$\tfrac{d}{ds}\big(x \circ c\big)_{|s=0} = \tfrac{d}{ds}\big(x \circ d\big)_{|s=0}$$

   Osoita, että

   - $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.
   - jos yllämainittu ehto pätee yhdelle kartalle, niin se pätee kaikille kartoille.

3. Olkoon M n–ulotteinen monisto ja $p \in U \cap V \subset M$, missä U ja V ovat avoimia. Olkoon $f \in C^\infty(U)$, $g \in C^\infty(V)$. Luennoilla määriteltiin: $f \sim g$ jos on olemassa avoin joukko W siten, että $p \in W \subset U \cap V$ ja $f(q) = g(q)$ kaikilla $q \in W$. Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

4. Luennoilla määriteltiin tangenttivektori toisaalta ekvivalenssiluokkina $\mathcal{K}_p/\sim$, toisaalta derivaatioina $\mathcal{E}_p \to \mathbb{R}$, missä $\mathcal{E}_p$ on ituavaruus. Olkoon $[c] \in \mathcal{K}_p/\sim$ ja $[f] \in \mathcal{E}_p$. Valitaan edustajat c ja f ja määritellään kuvaus $v : \mathcal{E}_p \to \mathbb{R}$ kaavalla $v(f) = \frac{d}{ds}\big(f \circ c\big)_{|s=0}$. Osoita, että
    - $v(f)$ ei riipu edustajien valinnasta.
    - v on derivaatio.

5. Olkoon $M(n \times n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ kuten edellä.
    - Luennolla näytettiin, että $\mathbb{SO}(n)$ on $M(n\times n)$:n alimonisto. Osoita, että $T_I\mathbb{SO}(n) \simeq \mathfrak{so}(n)$.
    - Osoita, että $T_I\mathbb{SL}(n) \simeq \mathfrak{sl}(n)$.

    Tässä siis I on yksikkömatriisi. Vertaa oheismateriaalin Lemmaan 3.5.

    Yleinen muotoilu: Lie-ryhmän G Lie-algebra on T_eG, missä e on ryhmän yksikköalkio.

6. Olkoon $p,q \in S^2$, $p \neq q$. Mi(t)kä seuraavista väitteistä on totta? Perustelu!
    - T_pS^2 ja T_qS^2 voidaan identifioida.
    - $T_pS^2 \cap T_qS^2 = \emptyset$ tangenttiavaruuden konstruktion perusteella.
    - $T_pS^2 \cap T_qS^2$ on suora, paitsi jos p ja q ovat vastakkaisia pisteitä, jolloin $T_pS^2 \cap T_qS^2 = \emptyset$.
    - $T_pS^2 \cap T_qS^2 = \{0\}$ koska T_pS^2 ja T_qS^2 voidaan molemmat tulkita erään vektoriavaruuden aliavaruuksiksi.

7. Tangenttiavaruuden määritelmässä vedottiin seuraavaan asiaan. Olkoon V vektoriavaruus ja $L : V \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus . Tällöin kaikkien tällaisten kuvausten joukko on myös vektoriavaruus. Todista tämä.[1]

8. Olkoon $v \in T_pM$ ja $f \in C^\infty(M)$. Osoita, että $v(f) = 0$, jos f on vakiofunktio.

[1]Sama todistus pätee yleisessäkin tapauksessa, missä $\mathbb{R}$ on korvattu jollain vektoriavaruudella.