Differentiaaligeometria, syksy 2002

Harjoitustehtäviä 7

1. Olkoon

$$x^{-1}(\theta,\varphi) = \big(\cos(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big)$$

   Siis (x, U) on kartta yksikköpallolla S^2. Mikä on U? Laske Riemannin metriikan komponentit g_{ij} tällä kartalla.

2. Tarkastellaan seuraavia vektorikenttiä $\mathbb{R}^3$:ssa.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} &= 5\frac{\partial}{\partial x_1} + 3\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} - 7\frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial y_3} &= 5\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

   Olkoon $\omega = x_3 dx_1 + x_1^2 dx_2 + x_2 dx_3$. Mikä on ω y–koordinaateissa? Olkoon $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (t, t^2, t^3)$. Laske $\int_c \omega$.

3. Olkoon X ja Y vektorikenttiä monistolla M. Oletetaan, että löytyy kartta (x, U) siten, että tällä kartalla $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ ja $Y = \frac{\partial}{\partial x_2}$. Osoita, että tällöin $[X, Y] = 0$.

   Käänteinenkin tulos pätee: jos $[X, Y] = 0$, niin on olemassa vaaditunlainen kartta. Tämän osoittaminen ei ole hirveän vaikeaa, mutta siinä vaaditaan eräitä asioita, joita tällä kurssilla ei ole tullut esille.

4. Olkoon $f : M \to \mathbb{R}$. Olkoon $p \in M$ f:n kriittinen piste, toisin sanoen $df_p = 0$. Olkoon X ja Y p:n ympäristössä määriteltyjä vektorikenttiä.

   - tarkista, että $[X, Y]_p(f) = 0$
   - Määritellään kuvaus $d^2 f : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

     $$d^2 f(X_p, Y_p) = X_p(Y(f))$$

     Jotta tämä olisi hyvin määritelty, niin oikean puolen pitäisi riippua vain Y_p:stä. Osoita tämä.
   - Osoita, että $d^2 f$ on symmetrinen.
   - Mikä lauseke saadaan $d^2 f(X_p, Y_p)$:lle, kun X ja Y esitetään koordinaattien avulla?

Näin konstruoitu kuvaus siis vastaa Hessin matriisia kriittisessä pistessä, kun $M = \mathbb{R}^n$.

5. Olkoon $f : M \to N$ ja $g : N \to P$. Mäytä, että

   - $d(g \circ f) = dg \circ df$.
   - $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

6. Olkoon M ja N monistoja, ja $\mathfrak{X}^*(M)$ ja $\mathfrak{X}^*(N)$ vastaavat kovektorikenttien joukot. Olkoon $f : M \to N$. "Pullback" voidaan määritellä sekä kovektorikentille että funktioille seuraavasti:

$$
\begin{array}{ll}
f^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M) & f^*g = g \circ f \\
f^* : \mathfrak{X}^*(N) \to \mathfrak{X}^*(M) & (f^*\omega)(v) = \omega(df\, v)
\end{array}
$$

   Osoita, että $d \circ f^* = f^* \circ d$, toisin sanoen, että seuraava kaavio kommutoi.

$$
\begin{tikzcd}
C^\infty(N) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^*"] & \mathfrak{X}^*(N) \arrow[d, "f^*"] \\
C^\infty(M) \arrow[r, "d"] & \mathfrak{X}^*(M)
\end{tikzcd}
$$