Differentiaaligeometria, syksy 2002

Harjoitustehtäviä 8

1. Tarkastellaan pallokoordinaatteja $\mathbb{R}^3$:ssa (vertaa tehtävä 7.1). Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Mikä on $\mathrm{grad}(f)$ pallokoordinaattien avulla? Olkoon sitten $f : S^2 \to \mathbb{R}$. Mikä on $\mathrm{grad}(f)$ tehtävän 7.1 koordinaateissa? Laske erityisesti $\mathrm{grad}(f)$, kun $f(x, y, z) = z$.

2. Tarkista, että
$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle = [ij, k]$$

3. Osoita, että
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = [ik, j] + [jk, i]$$
missä siis g_{ij} ovat Riemannin metriikan komponentit kartalla x, ja hakasulkulausekkeet ovat Christoffelin 1. lajin symboleita.

4. Todista oheismateriaalin Lemma 8.1.

5. Harjoitustehtävässä 5.1 saatiin "napakoordinaatistotasoon" Riemannin metriikka $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = r^2$. Laske Christoffelin symbolit Γ_{ij}^k.

6. Poincarén puolitaso on $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ varustettuna identiteettikoordinaattisysteemissä Riemannin metriikalla $g_{11} = g_{22} = 1/x_2^2$ ja $g_{12} = g_{21} = 0$. Valitaan toinen koordinaatisto (y, M) seuraavasti. Identifioidaan M ja kompleksitason ylempi puolitaso, siis $x = (x_1, x_2) \simeq x_1 + x_2 i = z$, ja määritellään
$$y(x) = \frac{z - i}{1 - iz}$$
Tämä on siis Möbiuksen kuvaus ylemmästä puolitasosta yksikkökiekkoon. Mikä on Riemannin metriikka ja Christoffelin symbolit Γ_{ij}^k tässä koordinaatistossa? Yksikkökiekkoa tällä metriikalla varustettuna sanotaan Poincarén kiekoksi.

   Luennolla jo laskettiin, että Poincarén puolitason Gaussin kaarevuus $K = -1$. Tarkista, että sama pätee Poincarén kiekolle. [1]

[1] Poincarén puolitaso ja kiekko ovat tunnettuja malleja epäeuklidisesta geometriasta. Jos on annettu piste p ja suora S, niin on äärettömän monta suoraa, jotka kulkevat pisteen p kautta eivätkä leikkaa suoraa S. Mitä nämä "suorat" ovat Poincarén kiekon tapauksessa? Tämä menee helpoiten Möbiuksen kuvausten ominaisuuksien avulla.

7. Tarkista, että suunnattu derivaatta on symmetrinen ja yhteensopiva $\mathbb{R}^n$:n tavallisen Riemannin metriikan kanssa, eli

$$dY\,X - dX\,Y = [X,Y] \quad \text{ja} \quad X\langle Y,Z\rangle = \langle dY\,X, Z\rangle + \langle Y, dZ\,X\rangle$$

8. Tarkista, että $\mathbb{R}^n$:n kaarevuus on nolla laskemalla, että kaarevuustensori on nolla. Siis kun konnektiona on suunnattu derivaatta, niin $R = 0$.