1 Verhokäyrät

Olkoon annettu käyräparvi c_a. Verhokäyrän intuitiivinen idea on seuraava:

- α on parven c_a verhokäyrä, jos α sivuaa jokaisessa pisteessään jotain parven käyristä.

Kun kiinnitetään a, niin saadaan (x, y)–tasoon käyrä c_a. Mutta jos ajatellaan a:ta kolmantena koordinaattina, niin c_a voidaan ajatella $\mathbb{R}^3$:n osajoukkona, "käyränä korkeudella a". Kun a muuttuu saamme siis erään pinnan 3–ulotteiseen avauuteen. Olkoon tämä pinta M, ja oletetaan, että se on sileä, eli että sen tangenttitaso on määritelty jokaisessa pinnan pisteessä. Merkitään tangenttitasoa pisteessä p T_pM:llä.

Määritellään edelleen luonnollinen projektio $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $(x, y, a) \mapsto (x, y)$. Koska voidaan luonnollisella tavalla ajatella, että $T_pM \subset \mathbb{R}^3$, niin π voidaan myös tulkita kuvaukseksi $T_pM \to \mathbb{R}^2$.

Olkoon c_{a_0} jokin parven käyristä. Kun se ajatellaan M:n osajoukkona "korkeudella" a_0, niin merkitään tätä M:lle "nostettua" käyrää $c^*_{a_0}$:llä; edelleen $\pi(c^*_{a_0}) = c_{a_0}$. Samoin verhokäyrä voidaan ajatella käyränä M:llä: jos α sivuaa käyrää c_{a_0} pisteessä (x_0, y_0), niin "nostetaan" α pisteeseen (x_0, y_0, a_0). Merkitään nostettua käyrää α^*:lla; luonnollisesti pätee tässäkin tapauksessa $\pi(\alpha^*) = \alpha$.

Olkoon $p = (x_0, y_0, a_0) \in M$. Tarkastellaan käyriä $c^*_{a_0}$ ja α^*, ja olkoon niitten tangenttivektorit v_c ja v_α. Selvästi $v_c \in T_pM$ ja $v_\alpha \in T_pM$. Verhokäyrän määritelmään päästään seuraavien huomioiden kautta:

- $v_c = (u_1, u_2, 0)$. Kolmas komponentti on nolla koska $c^*_{a_0}$ on vakiokorkeudella.
- $v_\alpha = (v_1, v_2, v_3)$, missä $v_3 \neq 0$. Kolmas komponentti ei ole nolla koska verhokäyrä sivuaa *eri* käyrää eri parametrien arvoilla.
- On olemassa $\lambda \neq 0$ siten että $\pi(v_c) = \lambda\pi(v_\alpha)$. Tämä ehto sanoo, että verhokäyrä todellakin sivuaa käyräparvea, siis tangentit ovat yhdensuuntaiset.
- 2 ensimmäisestä ehdosta seuraa, että v_c ja v_α ovat lineaarisesti riippumattomia. Ne siis virittävät T_pM:n. Mutta kolmannesta ehdosta silloin seuraa, että koko T_pM kuvautuu suoralle. Eli toisin sanoen π ajateltuna kuvauksena $T_pM \to \mathbb{R}^2$ *ei* ole bijektio.

Määritelmä 1.1. *Olkoon annettu käyräparvi c_a joka muodostaa pinnan M kuten yllä on kuvattu. Olkoon*

$$N = \left\{p \in M \mid \pi|_{T_pM} \quad \text{ei ole bijektio}\right\}$$

Parven verhokäyrä on $\pi(N)$.

Oletetaan sitten, että parvi on annettu muodossa

$$f(x, y, a) = 0$$

missä $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ on sileä funktio. Olkoon f:n nollakohtien joukko $M = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$. Muistetaan, että M on sileä pinta ($= \mathbb{R}^3$:n sileä 2-ulotteinen alimonisto), jos

$$\nabla f|_p \neq 0 \quad \text{kaikilla} \quad p \in M$$

Oletetaan tämä jatkossa.

Lause 1.1. *Verhokäyrän yhtälö saadaan kun eliminoidaan parametri a yhtälöryhmästä*

$$\begin{cases} f(x,y,a) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial a}(x,y,a) = 0 \end{cases}$$

Todistus. Kutsutaan a–akselia pystysuoraksi suunnaksi. Verhokäyrän määritelmän ehto voidaan muotoilla seuraavasti: projektio ei ole bijektio, jos T_pM on pystysuora. Koska $\nabla f|_p$ on pinnan M normaali pisteessä p, niin $T_pM \perp \nabla f|_p$. Tästä saamme edelleen ehdon $\partial f/\partial a = 0$. □

Tarkastellaan muutamia esimerkkejä. Väitteitten tarkistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

- $f(x,y,a) = x^2 + y^2 - a^2$. Verhokäyriä ei ole.
- $f(x,y,a) = (x-a)^2 + y^2 - 1$. Verhokäyrät: $y = \pm 1$.
- Käyräparviin päädytään joskus difyhtälöiden kautta. Tarkastellaan Clairaut'n difyhtälöä

  $$(y')^2 + xy' - y = 0$$

  Derivoimalla yhtälö saadaan

  $$y''(2y' + 1) = 0$$

  Saadaan siis (yleinen ratkaisu) $y = ax + a^2$ ja (erikoisratkaisu) $y = -x^2/2$. Huomaa, että yleinen ratkaisu saadaan kun difyhtälössä y' korvataan a:lla. Tämä on pelkkä sattuma, mutta itse idea pätee yleisemmin. Yleensä 1. kertaluvun difyhtälön yleinen ratkaisu riippuu 1 parametrista, se on siis käyräparvi. Jos parvella on verhokäyrä, niin tämä voidaan laskea eliminoimalla y' yhtälöistä

  $$\begin{cases} f(x,y,y') = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y') = 0 \end{cases}$$

  Erityisesti siis on mahdollista, että onnistutaan laskemaan verhokäyrä/erikoisratkaisu vaikka yleistä ratkaisua ei tunnetakaan.

Viimeisessä esimerkissä siis difyhtälöä $f(x,y,y') = 0$ tarkastellaan pintana 3–ulotteisessa avaruudessa. Tällöin y' on ikään kuin riippumaton koordinaatti kuten x ja y. Tämä näkökulma johtaa difyhtälöitten geometriseen teoriaan, jossa difyhtälöt ovat *suihkuavaruuksien* (jet space) alimonistoja.

Entä jos parvi on annettu parametrimuodossa? Olkoon

$$c(a,t) = \big(c_1(a,t), c_2(a,t), c_3(a,t)\big)$$

Tämä määrittää pinnan, jos $\partial c/\partial a$ ja $\partial c/\partial t$ ovat lineaarisesti riippumattomia; nämä vektorit myös virittävät tangenttiavaruuden. Pinnan normaali on $\partial c/\partial a \times \partial c/\partial t$. Käyräparven tapauksessa siis jos kiinnitetään a_0, niin $c(a_0,t)$ on korkeudella a_0. Siis pätee

$$c(a,t) = \big(c_1(a,t), c_2(a,t), a\big) \tag{1.1}$$

Yksittäinen tasokäyrä saadaan siis projketiolla: $c_{a_0}(t) = \pi \circ c(a_0, t)$. Verhokäyrän laskemiseksi pitää siis määrittää ne pisteet joissa pinnan tangentti on pystysuora, eli pinnan normaali on vaakasuora.

Lause 1.2. *Olkoon parvi annettu muodossa* (1.1). *Parven verhokäyrä α on*

$$\alpha(t) = \pi \circ c(g(t), t)$$

missä g saadaan ratkaisemalla seuraava yhtälö a:n suhteen

$$\frac{\partial c_1}{\partial a}\frac{\partial c_2}{\partial t} - \frac{\partial c_2}{\partial a}\frac{\partial c_1}{\partial t} = 0$$

Todistus. Väite seuraa suoraan kun katsotaan miten normaali esitetään tangenttivektorien ristitulona. □

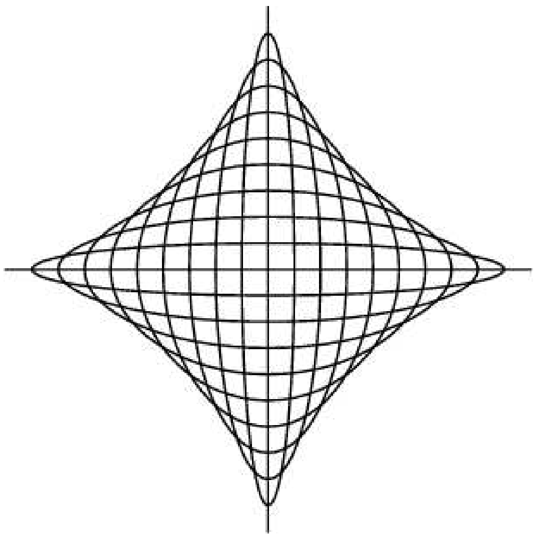
Katsotaan vielä yksi esimerkki. Olkoon

$$c(a, t) = \big(a\cos(t), (1-a)\sin(t), a\big)$$

missä $0 < a < 1$. Soveltamalla lausetta saadaan $a = g(t) = \cos^2(t)$, mistä edelleen

$$\alpha(t) = \big(\cos^3(t), \sin^3(t)\big)$$

Yhtälömuodossa verhokäyrä on $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$; käyrä on nimeltään astroidi.



Kuva 1.1: Ellipsiparvi ja sen verhokäyrä.