2 Jäykän kappaleen liike

2.1 Merkintöjä

$$
\begin{aligned}
\mathbb{GL}(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) \neq 0\} \\
\mathbb{SL}(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) = 1\} \\
\mathbb{O}(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t A = I\} \\
\mathbb{SO}(n) &= \{A \in \mathbb{O}(n) \mid \det(A) = 1\} \\
\mathfrak{sl}(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{tr}(A) = 0\} \\
\mathfrak{so}(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t = -A\} \\
\mathbb{E}(n) &= \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + v\ ,\ A \in \mathbb{SO}(n)\ ,\ v \in \mathbb{R}^n\}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{tr}(A)$ on A:n *jälki* (trace), ja tunnetusti

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

missä λ't ovat A:n ominaisarvot. Ensimmäinen yhtälö on määritelmä ja toinen on lemma. Sen todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

Jatkossa tarvitaan seuraavaa tulosta.

Lemma 2.1. *Olkoon $A \in \mathbb{SO}(3)$. Tällöin A:lla on ominaisarvo $\lambda = 1$. Olkoon $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ vinosymmetrinen. Tällöin C:llä on ominaisarvo $\lambda = 0$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. (Vihje: $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$) □

Siis jos $A \in \mathbb{SO}(3)$, niin on olemassa $v \neq 0$ siten, että $Av = v$. Tätä ominaisarvoa yksi vastaavaa ominaisavaruutta ($=$ v:n virittämä suora) sanotaan A:n *pyörähdysakseliksi.*

2.2 Jäykät kappaleet ja käyrät

Katsotaan seuraavassa miten jäykän kappaleen liikettä voidaan luonnollisella tavalla kuvata käyräteorian avulla. Jäykkä kappale on siis sellainen kappale, jonka pisteitten väliset etäisyydet eivät muutu. Matemaattiselta kannalta jäykkä kappale on $\mathbb{R}^3$:n kompakti ja yhtenäinen osajoukko, jonka liikkeet ovat isometrioita.

Mekaniikassa sanotaan, että jäykällä kappaleella on 6 vapausastetta; siis tarvitaan 6 koordinaattia kuvaamaan jäykän kappaleen liikettä. 3 niistä kuvaavat kappaleen massakeskipistettä. 3 muuta koordinaattia tarvitaan pyörimisliikkeen kuvailuun.

Massakeskipiste liikkuu erästä käyrää pitkin; olkoon tämä käyrä $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Liitetään tähän käyrään kehys (t, n, b) tavalliseen tapaan. Mekaniikassa sanotaan, että (t, n, b) on kappaleen paikallinen koordinaatisto, siis koordinaatisto, jonka suhteen kappale ei liiku. Kappaleen pyöriminen voidaan nyt saada selville analysoimalla miten kehys (t, n, b) muuttuu ajan funktiona.[1] Olkoon M kehysmatriisi jonka riveinä ovat

[1] Seuraavassa kuitenkin oletetaan, että käytetään kaarenpituusparametriä.

kehysvektorit, ja olkoon

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

Tällöin siis Frenet'n ja Serret'n yhtälöt voidaan kirjoittaa lyhyesti

$$M'(s) = A(s)M(s)$$

Luennoilla jo todettiin, että tämän ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$M(s) = B(s)M(0) \quad \text{missä} \quad B(s) = \exp\Big(\int_0^s A(u)du\Big)$$

Muistetaan luennoilta, että $B \in \mathbb{SO}(3)$ koska A on vinosymmetrinen. Selvästi edelleen $B(0) = I$ ja $B'(0) = A(0)$. Edelleen ylläolevan lemman mukaan on olemassa vektori v siten, että

$$B(s)v(s) = v(s)$$

Mitä tapahtuu kun $s \to 0$? Derivoidaan:

$$\begin{aligned} &B'(s)v(s) + B(s)v'(s) = v'(s) \quad \Rightarrow \quad B'(0)v(0) + B(0)v'(0) = v'(0) \\ &A(0)v(0) + v'(0) = v'(0) \quad \Rightarrow \quad A(0)v(0) = 0 \end{aligned}$$

Lemman mukaan A:lla on nollaominaisarvo, joten voidaan löytää $v(0) \neq 0$ siten, että $A(0)v(0) = 0$. B:n pyörähdysakseli lähestyy siis A:n nolla-avaruutta. Tämä nolla-avaruus tietysti muuttuu ajan myötä. Helposti voidaan tarkistaa, että kun määritellään $v(s) = \big(\tau(s), 0, \kappa(s)\big)$, niin $A(s)v(s) = 0$. v antaa siis pyörähdysakselin koordinaatit kehyksessä (t, n, b). Sama vektori paikallaanpysyvässä koordinaatistossa on siis $\omega(s) = \tau(s)t(s) + \kappa(s)b(s)$. Edelleen nähdään, että ω:n avulla Frenet'n ja Serret'n kaavat voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} t'(s) &= \omega(s) \times t(s) \\ n'(s) &= \omega(s) \times n(s) \\ b'(s) &= \omega(s) \times b(s) \end{aligned}$$

Siis ω:n suunta antaa kullakin hetkellä kappaleen pyörähdysakselin. Edelleen $|\omega(s)| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$; tämä ω:n pituus antaa kulmanopeuden, jolla kappale/kehys pyörii pyörähdysakselinsa ympäri.

Jäykän kappaleen 6 vapausastetta ovat siis c:n ja ω:n komponentit. Näin muodostuva $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ on jäykän kappaleen *tila-avaruus* (state space, phase space), ja liike voidaan siis ajatella käyränä $\mathbb{R}^6$:ssa: $t \mapsto \big(c(t), \omega(t)\big)$.

Jos ollaan kiinostuttu vain liikkeen alku- ja loppupisteestä, niin tällöin on olemassa $f \in \mathbb{E}(3)$, joka kuvaa alkutilan lopputilaksi. Huomaa, että $\dim\big(\mathbb{E}(3)\big) = 6$.

3 Yleishyödyllistä asiaa

3.1 Positiividefiniitit matriisit

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Palautetaan mieleen, että

- $\det\big(A\big) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ nolla ei ole A:n ominaisarvo
- symmetrisen matriisin ominaisarvot ovat reaalisia
- symmetrisen matriisin ominaisvektorit ovat kohtisuorassa (= ortogonaalisia)

Edelleen symmetrinen matriisi A on *positiividefiniitti*, jos $\langle v, Av\rangle > 0$ kaikilla $v \neq 0$, A on *negatiividefiniitti*, jos $\langle v, Av\rangle < 0$ kaikilla $v \neq 0$ ja A on *indefiniitti*, jos on olemassa v ja u siten, että $\langle v, Av\rangle > 0$ ja $\langle u, Au\rangle < 0$.

Lemma 3.1. *Olkoon A symmetrinen. Tällöin A on positiividefiniitti jos ja vain jos A:n kaikki ominaisarvot ovat positiivisia.*

Todistus. Olkoon A positiividefiniitti, ja olkoon λ jokin ominaisarvo, ja v vastaava ominaisvektori. Tällöin

$$0 < \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \lambda |v|^2$$

Olkoon A:n ominaisarvot positiivisia. Koska ominaisvektorit ovat ortogonaalisia, niin mielivaltainen vektori v voidaan esittää muodossa $v = c_1 v^1 + \cdots + c_n v^n$. Tällöin

$$\begin{aligned}\langle v, Av\rangle &= \langle \sum_{i=1}^n c_i v^i, A\sum_{i=1}^n c_i v^i\rangle = \langle \sum_{i=1}^n c_i v^i, \sum_{i=1}^n c_i\lambda_i v^i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_i c_j \lambda_i \langle v^i, v^j\rangle = \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i |v^i|^2 > 0\end{aligned}$$

□

3.2 Kriittiset pisteet

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sanotaan, että $p \in \mathbb{R}^n$ on f:n *kriittinen piste*, jos $\nabla f|_p = 0$. f:n *toinen differentiaali* eli *Hessin matriisi* on

$$d^2 f = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Huomaa, että $d^2 f$ on symmetrinen. $d^2 f$ voidaan tulkita kahdella tavalla. Toisaalta se on kuvaus

$$d^2 f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n} \quad , \quad x \mapsto d^2 f(x)$$

Mutta toisaalta jokaisessa pisteessä p, se määrittää bilineaarikuvauksen

$$d^2 f_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , \quad (u, v) \mapsto \langle u, d^2 f_p v\rangle$$

Kriittinen piste p on *säännöllinen*, jos det $\left(d^2 f_p\right) \neq 0$.

Lemma 3.2. *Olkoon p f:n säännöllinen kriittinen piste. Tällöin p on paikallinen minimi/maksimi/satulapiste, jos $d^2 f$ on positiivi/negatiivi/indefiniitti.*

Todistus. Kehitetään f Taylorin sarjaksi p:ssä:

$$\begin{aligned} f(p+v) =& f(p) + \langle \nabla f_p, v\rangle + \tfrac{1}{2}\langle v, d^2 f_p\, v\rangle + O(|v|^3) \\ =& f(p) + \tfrac{1}{2}\langle v, d^2 f_p\, v\rangle + O(|v|^3) \end{aligned}$$

□

Jos kriittinen piste ei ole säännöllinen, niin toinen differentiaali ei vielä "paljasta" kriittisen pisteen laatua.

Olkoon $\lambda_{min}(A)$ symmetrisen matriisin pienin ja $\lambda_{max}(A)$ suurin ominaisarvo.

Lemma 3.3. *Olkoon A symmetrinen. Tällöin*

$$\lambda_{min}(A) \leq \langle v, Av\rangle \leq \lambda_{max}(A)$$

kaikilla $|v| = 1$.

Todistus. Olkoon $f(v) = \frac{1}{2}\langle v, Av\rangle$. Halutaan siis löytää f:n pienin ja suurin arvo rajoitusehdolla $|v| = 1$. Selvästi ylä- ja alaraja epäyhtälöissä saavutetaan: riittää kun valitaan v:ksi suurinta ja pienintä ominaisarvoa vastaava ominaisvektori.

Käytetään sitten Lagrangen kertojaa. Olkoon $F(v,\lambda) = \frac{1}{2}\langle v, Av\rangle - \frac{\lambda}{2}\left(|v|^2 - 1\right)$. f:n kriittiset pisteet annetulla rajoitusehdolla saadaan ratkaisemalla v ja λ yhtälöistä

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v} &= Av - \lambda v = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \tfrac{1}{2}\left(|v|^2 - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

Siis kriittiset pisteet ovat A:n ominaisvektoreita, mistä väite seuraa. □

3.3 Difyhtälöitä

Tarkastellaan difyhtälösysteemiä

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = a \end{cases} \tag{3.1}$$

Tässä siis $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ ja $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Määritelmä 3.1. *f on Lipschitz-jatkuva alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ välillä $[t_0, t_1]$ jos on olemassa vakio L (Lipschitz-vakio) siten, että*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y|$$

kaikilla x, $y \in \Omega$ ja kaikilla $t \in [t_0, t_1]$.

Lause 3.1. *Jos f on Lipschitz-jatkuva jossain a:n avoimessa ympäristössä, niin on olemassa ε siten, että tehtävällä* (3.1) *on yksikäsitteinen ratkaisu välillä* $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Pelkkä f:n jatkuvuus takaa ratkaisun olemassaolon, mutta ei yksikäsitteisyyttä.

Ratkaisu ei myöskään välttämättä ole määritelty kaikilla t. Lineaarisessa tapauksessa ratkaisu on kuitenkin aina olemassa. Tarkastellaan tehtävää

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{3.2}$$

Oletetaan, että A on jatkuva (= matriisin kaikki alkiot ovat jatkuvia funktioita).

Lause 3.2. *Tehtävällä* (3.2) *on yksikäsitteinen ratkaisu kaikilla t.*

Todistus. Ratkaisu on yksikäsitteinen ja paikallisesti olemassa ylläolevan lauseen perusteella. Helposti voidaan tarkistaa, että ratkaisu on

$$x(t) = \exp\Big(\int_0^t A(s)ds\Big)x(0)$$

Matriisieksponentti on hyvin määritelty potenssisarjana, jos ylläoleva integraali on olemassa mikä puolestaan seuraa A:n alkioitten jatkuvuudesta. $\square$

3.4 Matriisiarvoiset käyrät

Matriisieksponentti voidaan määritellä potenssisarjalla:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Tämä on hyvin määritelty kaikilla A.

Lemma 3.4.

$$\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{tr}(A)}$$

Todistus. Vihje: jos λ on A:n ominaisarvo, niin e^λ on e^A:n ominaisarvo. $\square$

Tarkastellaan matriisidifferentiaaliyhtälöä

$$B'(s) = AB(s) \quad , \quad B(0) = I$$

Tämän ratkaisu on $B(s) = \exp(As)$, ja erityisesti $B'(0) = A$.

Lemma 3.5. *Jos $A \in \mathfrak{so}(n)$, niin $B(s) \in \mathbb{SO}(n)$ kaikilla s. Jos $A \in \mathfrak{sl}(n)$, niin $B(s) \in \mathbb{SL}(n)$ kaikilla s.*

Todistus. Edellinen väite oli luennoilla, jälkimmäinen seuraa suoraan lemmasta 3.4. $\square$

Tarkastellaan sitten mitä tahansa käyrää $\mathbb{SO}(n)$:ssa ja $\mathbb{SL}(n)$:ssa. Olkoon siis $B : \mathbb{R} \to \mathbb{SO}(n)$ ja $C : \mathbb{R} \to \mathbb{SL}(n)$. Oletetaan vielä, että $B(0) = C(0) = I$.

Lemma 3.6. *$B'(0) \in \mathfrak{so}(n)$ ja $C'(0) \in \mathfrak{sl}(n)$.*

Todistus. $B(s)^t B(s) = I$. Siis derivoimalla saadaan

$$B'(s)^t B(s) + B(s)^t B'(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad B'(0)^t B(0) + B(0)^t B'(0) = B'(0)^t + B'(0) = 0$$

$C(s) = I + C'(0)s + O(s^2)$. Siispä

$$1 = \det\bigl(C(s)\bigr) = 1 + \operatorname{tr}\bigl(C'(0)\bigr)s + O(s^2)$$

joten $\operatorname{tr}\bigl(C'(0)\bigr) = 0$. □

Edellinen voidaan tulkita seuraavasti: $B'(0)$ (vastaavasti $C'(0)$) on käyrän B (C) tangenttivektori pisteessä I. Siis $\mathbb{SO}(n)$:n ($\mathbb{SL}(n)$:n) tangenttiavaruus pisteessä I on $\mathfrak{so}(n)$ ($\mathfrak{sl}(n)$).

Myöhemmin tämä sanotaan seuraavasti: $\mathbb{SO}(n)$ ja $\mathbb{SL}(n)$ ovat *Lie-ryhmiä*, joitten *Lie-algebrat* ovat $\mathfrak{so}(n)$ ja $\mathfrak{sl}(n)$.