4 Koordinaatit

4.1 Vektorit eri koordinaatistoissa

Katsotaan muutama asia koordinaattimuunnoksista. Olkoon V reaalikertoiminen vektoriavaruus, ja olkoon $\{u^1, \ldots, u^n\}$ ja $\{v^1, \ldots, v^n\}$ V:n kantoja. Jokainen vektori voidaan siis esittää muodossa

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_i u^i = \sum_{i=1}^{n} c_i v^i \tag{4.1}$$

missä siis $b = (b_1, \ldots, b_n)$ (vastaavasti $c = (c_1, \ldots, c_n)$) on x:n *koordinaatit* kannassa $\{u^1, \ldots, u^n\}$ (vastaavasti kannassa $\{v^1, \ldots, v^n\}$).

Luonnollisesti x:n paikalle voidaan laittaa jokin kantavektoreista. On siis olemassa luvut a_{ij} ja d_{ij} siten, että

$$u^j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v^i \quad \text{ja} \quad v^j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} u^i \tag{4.2}$$

Olkoon A ja D matriisit, joitten alkioina ovat luvut a_{ij} ja d_{ij}.

Lemma 4.1. *Olkoon x annettu kuten yhtälössä* (4.1). *Tällöin $b = Ac$ ja $c = Db$. Erityisesti siis $D = A^{-1}$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Miten sitten matriisi A voidaan määrittää? Oletetaan nyt, että V:ssä on annettu sisätulo. Määritellään matriisit

$$M_u = \Big(\langle u^i, u^j\rangle\Big)_{i,j=1}^{n} \quad , \quad M_{uv} = \Big(\langle u^i, v^j\rangle\Big)_{i,j=1}^{n}$$

$$M_v = \Big(\langle v^i, v^j\rangle\Big)_{i,j=1}^{n} \quad , \quad M_{vu} = M_{uv}^t = \Big(\langle v^i, u^j\rangle\Big)_{i,j=1}^{n}$$

Matriiseja M_u ja M_v sanotaan joskus kyseisten kantojen *Gramin matriiseiksi.*

Ottamalla yhtälöstä (4.2) sisätuloja kantavektoreitten suhteen saadaan

$$A = M_v^{-1} M_{vu} = M_v^{-1} M_{uv}^t = M_{uv}^{-1} M_u$$

Tämänkin osoittaminen jätetään harjoitustehtäväksi. Jos v – kanta on ortonormaali, niin $M_v = I$, joten $A = M_{vu}$ ja $A^t A = M_u$. Jos molemmat kannat ovat ortonormaaleja, niin $A = M_{vu}$ on ortogonaalimatriisi.

4.2 Lineaarikuvaukset eri koordinaatistoissa

Olkoon sitten $T : V \to W$ vektoriavaruuksien välinen lineaarikuvaus, ja olkoon $\{v^1, \ldots, v^n\}$ V:n kanta ja $\{w^1, \ldots, w^k\}$ W:n kanta. Siis $\dim(V) = n$ ja $\dim(W) = k$.

Merkitään $u^j = Tv^j$. Joukon $\{u^1, \dots, u^n\}$ ei tietenkään tarvitse olla kanta tai edes lineaarisesti riippumaton. Joka tapauksessa on kuitenkin olemassa luvut s_{ij} siten, että

$$u^j = \sum_{i=1}^{k} s_{ij} w^i$$

Siis kun kuvataan jokin vektori $x = \sum_{j=1}^{n} c_j v^j$ T:llä, niin saadaan

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} c_j T v^j = \sum_{j=1}^{n} c_j u^j = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{k} s_{ij} w^i = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} c_j \Big) w^i$$

x:n koordinaattivektori on siis c, ja Tx:n koordinaattivektori on $b = Sc$.

Määritelmä 4.1. *S on lineaarikuvauksen $T : V \to W$ matriisi kantojen $\{v^1, \dots, v^n\}$ ja $\{w^1, \dots, w^k\}$ suhteen.*

Entä miten S muuttuu kun kun kantoja vaihdetaan? Olkoon $\{\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^n\}$ (vastaavasti $\{\tilde{w}^1, \dots, \tilde{w}^k\}$) V:n (vastaavasti W:n) jokin toinen kanta, ja olkoon T:n matriisi näitä kantoja käyttäen $\tilde{S}$. Mikä on S:n ja $\tilde{S}$:n välinen yhteys?

Olkoon $y = Tx$; tällöin voidaan kirjoittaa

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i v^i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i \tilde{v}^i$$
$$y = \sum_{i=1}^{k} b_i w^i = \sum_{i=1}^{k} \tilde{b}_i \tilde{w}^i$$

Lemman 4.1 mukaan on olemassa matriisit A_v ja A_w siten, että $\tilde{c} = A_v c$ ja $\tilde{b} = A_w b$. Nyt $\tilde{b} = \tilde{S}\tilde{c} = \tilde{S} A_v c$, toisaalta $\tilde{b} = A_w b = A_w S c$. Siis täytyy päteä $\tilde{S} A_v = A_w S$ eli $\tilde{S} = A_w S A_v^{-1}$. Tämä voidaan esittää *kommutoivien kaavioiden* avulla seuraavasti.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "S"] \arrow[d, "A_v"'] & \mathbb{R}^k \arrow[d, "A_w"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\tilde{S}"] & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

Jos V ja W ovat sisätuloavaruuksia, niin matriisit A_v ja A_w voidaan laskea kuten kappaleessa 4.1 on esitetty. Entä miten lasketaan itse S ? Olkoon siis $\{v^1, \dots, v^n\}$ ja $\{w^1, \dots, w^k\}$ V:n ja W:n kannat, ja olkoon $u^j = Tv^j$.Määritellään matriisit

$$M_w = \Big(\langle w^i, w^j \rangle \Big)_{i,j=1}^{k} \quad , \quad M_{uw} = \Big(\langle u^i, w^j \rangle \Big)_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times k} \tag{4.3}$$

Nyt siis $S = M_w^{-1} M_{uw}^t$.

Mitä lineaarikuvauksen ominaisuuksia saadaan selville, kun lasketaan sitä vastaava matriisi? Menemättä sen kummemmin lineaarialgebran syövereihin, listataan muutamia perusasioita. Väitteitten todistaminen on luonnollisesti erinomainen harjoitustehtävä. Olkoon seuraavassa S lineaarikuvauksen $T : V \to W$ matriisi, ja $\dim(V) = n$ ja $\dim(W) = k$.

- Vain matriisin *rangi* säilyy invarianttina, jos kannoilta ei oleteta mitään erityistä. Toisin sanoen jos T:n rangi on r, niin se voidaan esittää muodossa

  $$S = \mathrm{diag}\Big(1, \dots, 1, 0, \dots, 0\Big)$$

  missä ykkösiä on r kappaletta.

- Jos V:n ja W:n kannat ovat *ortonormaaleja*, niin S:n *singulaariarvot* eivät riipu valitusta kannasta. Toisin sanoen T voidaan esittää muodossa

  $$S = \mathrm{diag}\Big(\sigma_1, \dots, \sigma_n\Big)$$

  missä $\sigma_i \geq 0$ ovat singulaariarvot. Rangi r näkyy siten, että singulaariarvot voidaan järjestää laskevasti: $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$.

- Olkoon $V = W$. T:n matriiseille pätee: $\tilde{S} = A_v S A_v^{-1}$. Siis S ja $\tilde{S}$ ovat *similaareja*, joten niillä on samat ominaisarvot. Tämän takia voidaan puhua *lineaarikuvauksen* ominaisarvoista.

4.3 Symmetriset lineaarikuvaukset

Olkoon $T : V \to V$ sisätuloavaruuden lineaarikuvaus. Sanotaan, että T on *symmetrinen*, jos

$$\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle \quad \text{kaikilla} \quad x,\, y \in V$$

Soveltamalla kaavoja (4.3) tapauksessa $V = W$ saadaan T:n matriisiksi $S = M_v^{-1} M_{uv}^t$. Selvästi M_v on symmetrinen matriisi, eli $M_v = M_v^t$. Mutta myös M_{uv} on symmetrinen, jos T on symmetrinen. Olkoon M_{uv}:n alkiot m_{ij}. Tällöin

$$m_{ij} = \langle u^i, v^j \rangle = \langle Tv^i, v^j \rangle = \langle v^i, Tv^j \rangle = \langle v^i, u^j \rangle = \langle u^j, v^i \rangle = m_{ji}$$

Siis S on kahden symmetrisen matriisin tulo, mutta yleisesti ottaen S **ei** ole symmetrinen.

Harjoitustehtävä: voitko löytää sellaisia kantoja, jotka takaavat, että symmetristä lineaarikuvausta vastaa aina symmetrinen matriisi?

Huomaa lopuksi, että ylläolevaa symmetrisyyden määritelmää voi käyttää sellaisenaan myös äärettömänulotteisissa avaruuksissa, esimerkiksi avaruudessa $L^2(\mathbb{R}^n)$.