5 Pintateorian peruskaavoja

Olkoon $f : \Omega \to M \subset \mathbb{R}^3$ on pinnan parametrisointi, n pinnan normaali, ja olkoon E, F ja G (vastaavasti $\tilde{E}$, $\tilde{F}$ ja $\tilde{G}$) ensimmäisen (vastaavasti toisen) perusmuodon komponentit.

Gaussin yhtälöt ovat

$$\begin{aligned} f_{11} =& \Gamma^1_{11} f_1 + \Gamma^2_{11} f_2 + \tilde{E} n \\ f_{12} =& \Gamma^1_{12} f_1 + \Gamma^2_{12} f_2 + \tilde{F} n \\ f_{22} =& \Gamma^1_{22} f_1 + \Gamma^2_{22} f_2 + \tilde{G} n \end{aligned}$$

missä *Christoffelin symbolit* Γ ovat

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} =& \frac{1}{2(EG - F^2)} \big(G E_1 - 2F F_1 + F E_2 \big) \\ \Gamma^1_{12} =& \frac{1}{2(EG - F^2)} \big(G E_2 - F G_1 \big) \\ \Gamma^1_{22} =& \frac{1}{2(EG - F^2)} \big(2G F_2 - G G_1 - F G_2 \big) \\ \Gamma^2_{11} =& \frac{1}{2(EG - F^2)} \big(2E F_1 - E E_2 - F E_1 \big) \\ \Gamma^2_{12} =& \frac{1}{2(EG - F^2)} \big(E G_1 - F E_2 \big) \\ \Gamma^2_{22} =& \frac{1}{2(EG - F^2)} \big(E G_2 - 2F F_2 + F G_1 \big) \end{aligned}$$

Seuraaviakin yhtälöitä sanotaan joskus *Weingartenin yhtälöiksi*:

$$\begin{aligned} n_1 =& \frac{\tilde{F}F - \tilde{E}G}{EG - F^2} f_1 + \frac{\tilde{E}F - \tilde{F}E}{EG - F^2} f_2 \\ n_2 =& \frac{\tilde{G}F - \tilde{F}G}{EG - F^2} f_1 + \frac{\tilde{F}F - \tilde{G}E}{EG - F^2} f_2 \end{aligned}$$

Codazzi-Mainardin yhtälöt ovat

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2 - \tilde{F}_1 =& \tilde{E}\,\Gamma^1_{12} + \tilde{F}\big(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\big) - \tilde{G}\,\Gamma^2_{11} \\ \tilde{F}_2 - \tilde{G}_1 =& \tilde{E}\,\Gamma^1_{22} + \tilde{F}\big(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\big) - \tilde{G}\,\Gamma^2_{12} \end{aligned}$$

Nämä siis saadaan derivoimalla Gaussin yhtälöistä.

Eräs tapa lausua Gaussin kaarevuus suoraan metriikan avulla on seuraava:

$$K = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial u_2} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u_1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \big(\Gamma^2_{12}\big)^2 \right)$$

Jos halutaan eliminoida Christoffelin symbolit ja saada yhtälö, jossa esiintyy pelkästään E, F, G ja näitten derivaattoja, niin päädytään kaavaan

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \Big(\det(A) - \det(B) \Big)$$

missä

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E_{22} + F_{12} - \frac{1}{2}G_{11} & \frac{1}{2}E_1 & F_1 - \frac{1}{2}E_2 \\ F_2 - \frac{1}{2}G_1 & E & F \\ \frac{1}{2}G_2 & F & G \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_2 & \frac{1}{2}G_1 \\ \frac{1}{2}E_2 & E & F \\ \frac{1}{2}G_1 & F & G \end{pmatrix}$$