7 Vektoriavaruus ja sen duaali

7.1 Yleinen tapaus

Olkoon V jokin (reaalikertoiminen) vektoriavaruus. Tällöin kaikki lineaarikuvaukset $L : V \to \mathbb{R}$ muodostavat V:n duaaliavaruuden, jota yleensä merkitään V^*:llä. Myös V^* on vektoriavaruus, ja jos $\dim(V) < \infty$, niin $\dim(V) = \dim(V^*)$. Tarkastellaan seuraavassa vain tätä äärellisulotteista tapausta; ääretönulotteinen tapaus käsitellään funktionaalianalyysissä.

Koska siis V ja V^* ovat "yhtä isoja", niin voisi ehkä luulla, että ne ovat "samanlaisia". Seuraavassa yritetään vakuuttua siitä, että ne todellisuudessa ovat aivan erilaisia.

Olkoon $\dim(V) = n$, ja olkoon $\{e^1, \ldots, e^n\}$ V:n kanta. Sanotaan, että $\{\ell^1, \ldots, \ell^n\}$ on V^*:n vastaava *duaalikanta*, jos

$$\ell^k(e^j) = \begin{cases} 1 \ , \ j = k \\ 0 \ , \ j \neq k \end{cases}$$

Tällainen duaalikanta on aina olemassa (harjoitustehtävä). Olkoon sitten $\{\tilde{e}^1, \ldots, \tilde{e}^n\}$ V:n toinen kanta ja $\{\tilde{\ell}^1, \ldots, \tilde{\ell}^n\}$ tätä vastaava duaalikanta. Olkoon edelleen

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e^i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i \tilde{e}^i$$
$$L = \sum_{i=1}^{n} b_i \ell^i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i \tilde{\ell}^i$$

Kappaleessa 4 jo selvitettiin miten avaruuden V koordinaatit käyttäytyvät kannanvaihdossa. Jos siis

$$\tilde{e}^j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e^j$$

niin $a = C^T \tilde{a}$. Mutta entä miten käy duaalikannan? On siis olemassa vakiot d_{ij} siten, että

$$\tilde{\ell}^i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \ell^j$$

Nyt siis pätee

$$\tilde{\ell}^k(\tilde{e}^j) = \begin{cases} 1 \ , \ j = k \\ 0 \ , \ j \neq k \end{cases}$$

mutta toisaalta

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}^k(\tilde{e}^j) =& \tilde{\ell}^k\Big(\sum_{i=1}^{n} c_{ji} e^i\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} \tilde{\ell}^k(e^i) \\ =& \sum_{i=1}^{n} c_{ji} \sum_{m=1}^{n} d_{km} \ell^m(e^i) = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} d_{ki} \end{aligned}$$

Tästä selvästi seuraa, että $D = C^{-T}$. Merkitään edelleen C^{-1}:n komponentteja c^{ij}:llä. Siis

$$\tilde{\ell}^j = \sum_{i=1}^{n} c^{ij} \ell^i \quad \Rightarrow \quad \ell^j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \tilde{\ell}^i$$

Tästä puolestaan saadaan vastaavasti koordinaateille:

$$b^i = \sum_{j=1}^{n} c^{ij} \tilde{b}^j \quad \Rightarrow \quad \tilde{b}^i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} b^j$$

Sovelletaan tätä tapauksessa, jossa avaruudet ovat T_pM ja T_p^*M. Kun valitaan kartta (x, U), niin saadaan kanta ja duaalikanta:

$$T_pM = \mathrm{span}\left\{\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}\right\} \quad \text{ja} \quad T_p^*M = \mathrm{span}\left\{dx_1, \dots, dx_n\right\}$$

Jos (y, V) on toinen kartta, ja $c_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial y_i}$, niin kannan- ja koordinaattien vaihdot menevät seuraavasti:

$$\left\{\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}\right\} \xrightarrow{\quad C \quad} \left\{\tfrac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial y_n}\right\}$$

$$(a_1, \dots, a_n) \xleftarrow{\quad C^T \quad} (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$$

$$\{dx_1, \dots, dx_n\} \xleftarrow{\quad C^T \quad} \{dy_1, \dots, dy_n\}$$

$$(b_1, \dots, b_n) \xrightarrow{\quad C \quad} (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)$$

Siis vaikka V:n ja V^*:n alkioita voidaan molempia esittää n:n koordinaatin avulla, niin kyseiset koordinaatit käyttäytyvät eri tavalla koordinaattimuunnoksissa. Yleisesti ottaen ei ole "luonnollista" tapaa identifioda avaruuksia V ja V^*.[1]

7.2 Sisätulo

Tarkastellaan edellisen kappaleen tilannetta, mutta oletetaan lisäksi, että V:ssä on annettu sisätulo, eli bilineaarikuvaus

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

joka on symmetrinen ja positiividefiniitti. Muistetaan, että sisätulo määrittää normin, ja siis metriikan, joten V on tässä tapauksessa normiavaruus. Sisätulon avulla voimme siirtyä avaruudesta duaaliavaruuteen. Määritellään kuvaus $\psi : V \to V^*$ kaavalla

$$\psi(u)(v) = \langle u, v \rangle \tag{7.1}$$

missä u, $v \in V$. Voidaan varsin suoraviivaisesti tarkistaa, että ψ on bijektiivinen lineaarikuvaus.

[1] Sanalle luonnollinen voidaan antaa tässä yhteydessä matemaattinen määritelmä.

Tarkastellaan sitten moniston tapausta. Riemannin metriikka on sisätulo

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \,:\, T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

joka riippuu pisteestä p. Kaava (7.1) määrittelee kuvauksen $\psi_p \,:\, T_pM \to T_p^*M$. Esitetään tämä kuvaus koordinaattien avulla. Olkoon (x, U) kartta, $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ja $\psi(X) = \sum_{i=1}^n c_i dx_i$. Pieni lasku antaa, että $c = Ga$, missä

$$g_{ij} = \langle \tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j} \rangle$$

Toisin sanoen kuvaus ψ saadaan kun valitaan sisätulo eli Riemannin metriikka.

7.3 Indeksien pyörittelyä

Muutetaan nyt hiukan merkintöjä, jotta eräs fyysikkojen käyttämä kikka toimii. Sovitaan, että yläindeksit tarkoittavat, että kyseessä on T_pM:n alkion koordinaatit, ja alaindeksit, että kyseessä on T_p^*M:n alkion koordinaatit. Siis

$$a^1 \tfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a^n \tfrac{\partial}{\partial x_n} \in T_pM \quad \text{ja} \quad b_1 dx_1 + \cdots + b_n dx_n \in T_p^*M$$

Nyt voidaan mennä tangentti- ja kotangenttiavaruuden välillä seuraavasti (g^{ij}:t ovat G^{-1}:n komponentteja):

$$\tilde{a}_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} a^j$$
$$\tilde{b}^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} b_j$$

Tämä operaatio on "raising and lowering the indices with the metric". Suomennos:

- g_{ij}:t ovat Riemannin metriikan komponentit tietyllä kartalla.
- tensorilaskussa yleensäkin indeksin "paikalla" on merkitystä. Siis kun "nostetaan" indeksiä, niin mennään tangenttiavaruuteen "päin", ja kun "lasketaan", niin mennään kotangenttiavaruuteen "päin".

Fyysikoilla on lisäksi tapana käyttää *Einsteinin summauskäytäntöä*. Se tarkoittaa sitä, että ei kirjoiteta summamerkkejä ollenkaan, vaan automaattisesti summataan aina, jos sama indeksi esiintyy ylhäällä ja alhaalla. Summan ylä- ja alarajoja ei tarvita, koska aina summataan avaruuden dimension yli, ja se taas on selvää asiayhteydestä.

Siis voitaisiin yksinkertaisesti kirjoittaa $\tilde{a}_i = g_{ij} a^j$ ja $\tilde{b}^i = g^{ij} b_j$. Samoin voidaan todeta, että kantavektoreitten kirjoittaminen on "turhaa", koska onhan selvää, että käytetään jotain karttaa, mutta usein ei ole tarpeen eksplisiittisesti tietää mikä kartta on kyseessä. Siis jos kirjoitetaan a^i ja b_i, niin heti tiedetään, että ensimmäinen kuvaa vektorikenttää tietyssä koordinaatistossa (indeksi ylhäällä) ja toinen kovektorikenttää (indeksi alhaalla).