8 Konnektio ja kaarevuustensori

8.1 Konnektio

Eräs mahdollinen tapa lähestyä konnektion ideaa on, että pitää jollain tavalla yleistää suunnatun derivaatan käsitettä. Katsotaan ensin miltä tilanne näyttää $\mathbb{R}^n$:ssä. Olkoon siis X ja Y vektorikenttiä, jotka tavallisessa koordinaatistossa voidaan siis esittää muodossa

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \tfrac{\partial}{\partial x_i} \qquad\qquad Y = \sum_{i=1}^{n} b_i \tfrac{\partial}{\partial x_i} \tag{8.1}$$

Merkitään edelleen $a = (a_1, \dots, a_n)$ ja $b = (b_1, \dots, b_n)$. Siis sekä a että b ovat kuvauksia $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Tämähän on tavallinen tapa tarkastella asiaa analyysin kannalta: unohdetaan valittu koordinaatisto, ja identifioidaan X ja a. Tavallisen monen muuttujan analyysin mukaan nyt b:n suunnattu derivaatta a:n suhteen on $c = db\, a$. Kirjoitetaan tämä seuraavasti:

$$\nabla_X Y = dY\, X = \sum_{i=1}^{n} c_i \tfrac{\partial}{\partial x_i} \simeq c = db\, a$$

Huomataan, että X ja Y eivät ole samassa asemassa: Y:tä derivoidaan, mutta X antaa "vain" suunnan. Siis jos X:ä skaalataan funktiolla $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, niin $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$. Entä jos Y:tä skaalaa funktiolla? Tällöin

$$c = d(fb)\, a = f\, db\, a + (df\, a) b$$

Mutta $df\, a = X(f)$, joten

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y$$

Nyt ollaankin jo melkein konnektion määritelmässä. Olkoon M monisto, ja merkitään $\mathfrak{X}(M)$:llä M:n vektorikenttien joukkoa. Tarkastellaan kuvausta

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) \qquad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

Määritelmä 8.1. *Kuvaus ∇ on* (Koszulin) konnektio*, jos kaikille X,Y, X_i, $Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ ja $f \in C^\infty(M)$ pätee*

1. $\nabla_{X_1 + X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$
2. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
3. $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
4. $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y$

Kaksi ensimmäistä ehtoa sanoo, että ∇ on $C^\infty(M)$–lineaarinen X:n suhteen. Kahdesta jälkimmäisestä seuraa, että ∇ on $\mathbb{R}$–lineaarinen Y:n suhteen.

Huomattakoon erityisesti, että määritelmässä ei mainita Riemannin eikä mitään muutakaan metriikkaa.

Olkoon sitten M n–ulotteinen monisto, ja (x,U) jokin kartta. Tällöin vektorikentät X ja Y voidaan kirjoittaa kuten yhtälössä (8.1), missä nyt a_i, $b_i \in C^\infty(M)$. Nyt voisi kuvitella, että voidaan edetä kuten $\mathbb{R}^n$:n tapauksessa: siellähän db:n komponentit olivat

$$\left(db\right)_{ij} = \tfrac{\partial b_i}{\partial x_j}$$

missä osittaisderivaatat ovat "tavallisia". Moniston tapauksessa

$$\tfrac{\partial b_i}{\partial x_j} = \tfrac{\partial}{\partial u_j}\left(b_i \circ x^{-1}\right)$$

Osoittautuu kuitenkin, että komponentteja c_i ei voi määritellä näin, koska tällöin c_i't eivät käyttäytyisi koordinaattimuunnoksissa kuten tangenttivektoreitten kuuluu! Edellistä kaavaa pitää siis "korjata". Merkitään Db:llä "korjattua" matriisia, ja asetetaan

$$\left(Db\right)_{ij} = \tfrac{\partial b_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} b_k$$

missä siis Γ^i_{jk} ovat joitain funktioita $x(U)$:ssa. Tietenkään ei ole vielä selvää auttaako tämä asiaa, mutta katsotaan ensin mihin tämä johtaa. Olkoon siis annettu kartta (x,U), ja tähän liityyvät n^3 kappaletta funktioita Γ, ja vektorikentät kuten yhtälössä (8.1). Määritellään sitten ∇ kaavalla

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n} c_i \tfrac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{missä} \quad c = Db\,a \tag{8.2}$$

Erityisesti siis

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \tfrac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \tfrac{\partial}{\partial x_k}$$

Nyt pitää vielä tarkistaa, että näin määritelty vektorikenttä "käyttäytyy hyvin" koordinaattimuunnoksissa. Tämä on pitkähkö lasku, jossa esiintyy paljon indeksejä. Lopputulos on se, että kaikki menee hyvin, jos Γ't käyttäytyvät koordinaattimuunnoksissa seuraavasti.

Määritelmä 8.2. *Olkoon annetty kaksi karttaa (x,U) ja (y,V), ja $p \in U \cap V$. Olkoon näitä karttoja vastaavat "korjauskertoimet" pisteessä p Γ^k_{ij} ja $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$. Tämä määrittelee* (klassisen) konnektion, *jos*

$$\tilde{\Gamma}^r_{lm} = \sum_{i,j,k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \tfrac{\partial x_i}{\partial y_l} \tfrac{\partial x_j}{\partial y_m} \tfrac{\partial y_r}{\partial x_k} + \sum_{s=1}^{n} \tfrac{\partial^2 x_s}{\partial y_l \partial y_m} \tfrac{\partial y_r}{\partial x_s}$$

Siis jos Γ't määrittelevät klassisen konnektion, niin yhtälö (8.2) määrittelee Koszulin konnektion. Edelleen sanotaan, että konnektio on *symmetrinen*, jos $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. Pienen laskun avulla saamme

Lemma 8.1. *Jos konnektio on symmetrinen, niin*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Erityisesti tästä seuraa, että

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Nyt otetaan metriikka mukaan. Merkitään Riemannin metriikkaa tavallisella sisätulomerkinnällä.

Määritelmä 8.3. *Konnektio on yhteensopiva Riemannin metriikan kanssa, jos*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

kaikilla X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Lause 8.1. *Riemannin monistolla on olemassa yksikäsitteinen symmetrinen konnektio, joka on yhteensopiva metriikan kanssa.*

Todistus. Valitaan koordinaatit (x, U) ja olkoon metriikan komponentit

$$g_{ij} = \langle \tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}\rangle$$

Todistuksen ideana on näyttää, että konnektion komponentit Γ_{ij}^k voidaan laskea metriikan eli komponenttien g_{ij} avulla. Ensin oletetaan, että jokin vaaditunlainen konnektio on olemassa. On siis olemassa kertoimet $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ siten, että

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Pitää osoittaa, että Γ't voidaan laskea metriikasta. Derivoidaan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\Big\rangle = \Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\Big\rangle + \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big\rangle \\ &= \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_k}\Big\rangle + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l}\Big\rangle = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l g_{jl}\end{aligned}$$

Permutoidaan syklisesti indeksejä i, j ja k, ja lasketaan yhteen. Tämä johtaa kaavaan

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) \tag{8.3}$$

Tästä edelleen saadaan

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right) \tag{8.4}$$

Oikea puoli riippuu vain metriikasta, joten metriikka määrää konnektion.

Kääntäen jos *määritellään* Γ_{ij}^k kaavalla (8.4), niin voidaan suoraviivaisesti tarkistaa, että näin saadaan symmetrinen klassinen konnektio, joka on yhteensopiva metriikan kanssa. □

Tätä yksikäsitteistä konnektiota sanotaan yleensä joko Levi-Civitan tai Riemannin konnektioksi, vaikka oikeastaan Christoffelin konnektio olisi parempi nimitys, koska yhtälön (8.4) määrittämiä kertoimia sanotaan *(toisen lajin) Christoffelin symboleiksi.*

Yhtälön (8.3) oikeaa puolta sanotaan *ensimmäisen lajin Christoffelin symboleiksi*, ja on tapana käyttää merkintää

$$[ij,k] = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \tfrac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \tfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)$$

Kaavat (8.3) ja (8.4) voidaan täten kirjoittaa muodossa

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} g_{lk} = [ij,k] \qquad\qquad \Gamma_{ij}^{k} = \sum_{l=1}^{n} g^{kl}[ij,l] \tag{8.5}$$

8.2 Kaarevuustensori

Kaarevuutta voidaan lähestyä seuraavan ongelman avulla:

> Olkoon annettu Riemannin monisto M. Onko olemassa karttaa (x,U) siten, että U ja $x(U)$ ovat isometrisia, missä $x(U)$:ssa on annettu tavallinen $\mathbb{R}^n$:n metriikka? Toisin sanoen onko M lokaalisti isometrinen $\mathbb{R}^n$:n kanssa?

Ensinnäkin miksi on todennäköistä, että "satunnainen" M **ei** ole isometrinen $\mathbb{R}^n$:n kanssa, edes lokaalisti? Riemannin metriikka esitetään koordinaatistossa symmetrisen matriisin G avulla. G:llä on siis $(n+1)n/2$ riippumatonta komponenttia. Jos halutaan isometria $\mathbb{R}^n$:n kanssa, niin pitäisi löytää sellainen koordinaattimuunnos, että G uudessa koordinaatistossa olisi yksikkömatriisi I. Toisaalta koordinaattimuunnoskuvauksella on "vain" n komponenttia, joten yleisesti ottaen luulisi, että G:stä voidaan muuttaa vain n komponenttia. Siis voidaan olettaa, että metriikan pitäisi toteuttaa $(n-1)n/2$ lisäehtoa, jotta isometria olisi olemassa. Kun $n = 2$, niin pitäisi olla yksi lisäehto. Näinhän onkin, koska tiedämme, että pinta on isometrinen tason kanssa vain, jos Gaussin kaarevuus $K = 0$.

Tämän päättelyn esitti jo Riemann kuuluisassa esitelmässään *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, vuonna 1854. Lähtökohtana on siis miten metriikan komponentit käyttäytyvät koordinaattimuunnoksissa. Olkoon (x,U) ja (y,V) ovat kaksi karttaa, ja g_{ij} ovat metriikan komponentit kartalla (x,U) ja $\tilde{g}_{ij}$ ovat metriikan komponentit kartalla (y,V). Merkitään edelleen vastaavia matriiseja G:llä ja $\tilde{G}$:llä, ja olkoon G^{-1}:n komponentit g^{ij}. Näillä merkinnöillä muunnoskaava voidaan kirjoittaa muodossa

$$g_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{g}_{ij} \tfrac{\partial y_i}{\partial x_k} \tfrac{\partial y_j}{\partial x_l} \tag{8.6}$$

Nyt voimme muotoilla testiongelman seuraavasti:

> Olkoon (x,U) identiteettikoordinaatisto $\mathbb{R}^n$:ssä, ja g_{ij} annettu metriikka. Onko olemassa karttaa (y,V) siten, että $\tilde{g}_{ij}$ on $\mathbb{R}^n$:n tavallinen metriikka, eli $\tilde{G} = I$.

Päädymme kaavan (8.6) perusteella osittaisdifyhtälösysteemiin

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial y_i}{\partial x_l} = g_{kl} \tag{8.7}$$

Tässä on $(n+1)n/2$ yhtälöä ja n tuntematonta, joten luulisi tosiaan, että g:n pitäisi toteuttaa joitain yhteensopivuusehtoja, jotta ratkaisu olisi olemassa. Yleinen strategia yhteensopivuusehtojen löytämiseksi on derivoida yhtälöitä, ja pyrkiä sitten elimionoimaan muuttujia y, jotta jäljelle jäisi yhtälöitä, jotka riippuvat vain g:stä. Derivoidaan siis (8.7) x_j:n suhteen:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k \partial x_j}\frac{\partial y_i}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_l \partial x_j}\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j}$$

Permutoidaan indeksejä j, k ja l, ja lasketaan yhteen:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\partial y_i}{\partial x_l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l}\right) = [jk,l] \tag{8.8}$$

Pitäisi jotenkin pystyä ratkaisemaan termit $\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\partial y_i}{\partial x_l}$. Tässä tarvitaan seuraavaa huomiota. Olkoon $\delta_{ij} = 1$, jos $i = j$, ja $\delta_{ij} = 0$, jos $i \neq j$. Kaavasta (8.7) saadaan suoraan

Lemma 8.2.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} = \delta_{kl} \tag{8.9}$$

Todistus. Harjoitustehtävä.[1] □

Lähdetään sitten muokkaamaan kaavaa (8.8) ottamalla sopiva lineaarikombinaatio.

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} g^{lm}\frac{\partial y_r}{\partial x_m}[jk,l] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\partial y_i}{\partial x_l}\frac{\partial y_r}{\partial x_m} g^{lm} =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_k}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_l}\frac{\partial y_r}{\partial x_m} g^{lm} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_k}\delta_{ir} = \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_j \partial x_k}$$

Tästä saadaan sitten kaavojen (8.5) avulla

$$\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{l=1}^{n} \Gamma^l_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_l} \tag{8.10}$$

Huomataan, että *jokainen* komponenttifunktio y_k toteuttaa *saman* yhtälösysteemin. Olkoon sitten

$$z = \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y_k}{\partial x_n}\right)$$

[1] Vihje: kirjoita kaavat (8.7) ja (8.9) matriisien avulla.

Yhtälö (8.10) voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} z_l$$

Koska $\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial z_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial z_j}{\partial x_k}$, niin saadaan

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l=1}^{n}\Gamma_{ij}^{l} z_l - \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{l=1}^{n}\Gamma_{kj}^{l} z_l = \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial x_k} z_l - \frac{\partial \Gamma_{kj}^{l}}{\partial x_i} z_l\right) + \sum_{l=1}^{n}\left(\Gamma_{ij}^{l}\frac{\partial z_l}{\partial x_k} - \Gamma_{kj}^{l}\frac{\partial z_l}{\partial x_i}\right) =$$
$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial x_k} z_l - \frac{\partial \Gamma_{kj}^{l}}{\partial x_i} z_l\right) + \sum_{l=1}^{n}\left(\Gamma_{ij}^{l}\sum_{m=1}^{n}\Gamma_{kl}^{m} z_m - \Gamma_{kj}^{l}\sum_{m=1}^{n}\Gamma_{il}^{m} z_m\right) = 0$$

Mutta koska tämän yhtälön pitää päteä olipa z mikä tahansa, niin saamme

Lause 8.2. *Jos M on lokaalisti isometrinen $\mathbb{R}^n$:n kanssa, niin*

$$R_{jkl}^{i} = \frac{\partial \Gamma_{jl}^{i}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^{i}}{\partial x_l} + \sum_{m=1}^{n}\left(\Gamma_{jl}^{m}\Gamma_{mk}^{i} - \Gamma_{jk}^{m}\Gamma_{ml}^{i}\right) = 0$$

kaikilla i, j, k, l.

Määritelmä 8.4. R_{jkl}^{i} *ovat* kaarevuustensorin *komponentit kartalla (x, U). Lisäksi on tapana määritellä*

$$R_{ijkl} = \sum_{m=1}^{n} g_{im} R_{jkl}^{m}$$

Halutaan koordinaattiriippumaton määritelmä kaarevuustensorille. Tämä saadaan Koszulin operaattorin ∇ avulla.

Määritelmä 8.5. (Riemannin) kaarevuustensori *on kuvaus*

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)\\ \mathcal{R}(X,Y)Z &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z\end{aligned}$$

Lemma 8.3. *1.* $\mathcal{R}(X,Y)Z = -\mathcal{R}(Y,X)Z$

2. Bianchin 1. identiteetti: $\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Z,X)Y + \mathcal{R}(Y,Z)X = 0$

3. $\mathcal{R}(fX,Y)Z = f\mathcal{R}(X,Y)Z$

4. $\mathcal{R}(X,Y)fZ = f\mathcal{R}(X,Y)Z$

5. $\mathcal{R}(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l})\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} R_{jkl}^{i}\frac{\partial}{\partial x_i}$

6. $\langle \mathcal{R}(X,Y)Z, W\rangle = -\langle \mathcal{R}(X,Y)W, Z\rangle$

7. $\langle \mathcal{R}(X,Y)Z, W\rangle = \langle \mathcal{R}(Z,W)X, Y\rangle$

8. $\left\langle \mathcal{R}(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l})\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = R_{ijkl}$

Todistus. Katsotaan vaikkapa kohta (3). Ensinnäkin selvästi $\nabla_{fX}(\nabla_Y Z) = f\nabla_X(\nabla_Y Z)$. Sitten

$$\nabla_Y(\nabla_{fX}Z) = \nabla_Y(f\nabla_X Z) = f\nabla_Y(\nabla_X Z) + Y(f)\nabla_X Z$$

ja

$$\nabla_{[fX,Y]}Z = \nabla_{f[X,Y]-Y(f)X}Z = \nabla_{f[X,Y]}Z - \nabla_{Y(f)X}Z = f\nabla_{[X,Y]}Z - Y(f)\nabla_X Z$$

Laskemalla termit yhteen saadaan väite. □

Huomaa, että kohdista (1), (3) ja (4) seuraa, että $\mathcal{R}$ on $C^\infty(M)$–lineaarinen kaikkien argumenttiensa suhteen. Siis voidaan määritellä kuvaus

$$\mathcal{R}_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$$
$$\mathcal{R}_p(X_p, Y_p)Z_p = \nabla_X(\nabla_Y Z)|_p - \nabla_Y(\nabla_X Z)|_p - \nabla_{[X,Y]}Z|_p$$

Kaikista näistä symmetrioista seuraa, että vaikka R^i_{jkl}:llä on n^4 komponenttia, niin vain $(n-1)n/2$ näistä ovat riippumattomia. Nämä ovat siis ne ratkeavuusehdot.

Lause 8.3. *Jos $\mathcal{R} = 0$, niin M on lokaalisti isometrinen $\mathbb{R}^n$:n kanssa.*[2]

Todistus. Riemann toteaa lakonisesti, että

> given aquaintance with the traditional methods, it is demonstrated without difficulty that these conditions when they are satisfied, suffice...

□

[2]Tämä on Spivakin *test case*, ja sille annetaan 7 eri todistusta