Elementtimenetelmä
Harjoitus 1.

1. Olkoon

$$
\begin{aligned}
u(x_1, x_2, x_3) &= x_2^3 x_3 + \sin(x_1) + \frac{1}{2}x_3^2 + 3x_2 \\
v(x_1, x_2, x_3) &= (x_2^2 + x_1 x_3, x_2 \mathrm{e}^{x_1}, x_1 x_2^5 x_3^2).
\end{aligned}
$$

Laske
a) ∇u b) $\nabla \times v$ c) $\nabla \cdot v$
d) $\nabla \times (\nabla u)$ e) $\nabla \cdot (\nabla \times v)$ f) $\nabla \cdot (\nabla u)$
g) Δu h) Onko olemassa kuvausta $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ siten, että $v = \nabla f$?
i) Onko olemassa kuvausta $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ siten, että $v = \nabla \times g$?

2. Snellin laki sanoo, että

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2},$$

missä
α = tulokulma
β = heijastuskulma
c_1 = valon nopeus ennen heijastusta
c_2 = valon nopeus heijastuksen jälkeen.
Johda tämä laki Fermat'n periaatteen avulla: Valo kulkee polkua joka minimoi kulkuajan.

3. Tarkastellaan tehtävän 1) kuvausta u. Mitä ovat sen kriittiset pisteet? Ovatko nämä minimejä, maksimeja vai satulapisteitä?

4. a) Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $\inf f = 0$ mutta $f > 0 \ \forall\ x$.
b) Olkoon

$$J(y) = \int_0^1 [y(x)]^2 \, \mathrm{d}x,$$

$J : V \to \mathbb{R}, V = \Big\{ y : [0,1] \to \mathbb{R} \Big| y \text{ jatkuva }, y(0) = 0, y(1) = 1 \Big\}$. Osoita, että $\inf_{y \in V} J(y) = 0$ mutta $J(y) > 0 \ \forall\ y \in V$.