Elementtimenetelmä
Harjoitus 2.

1. Etsi seuraavien funktionaalien kriittiset funktiot (extremals). Muodosta Eulerin yhtälö ja ratkaise se.
a)

$$J(y) = \int_0^1 [y(x)^3 + 3x^2 y'(x)]\,\mathrm{d}x, W = \left\{ y \in C^1[0,1] \middle| y(0) = 0, y(1) = 2 \right\}$$

b)

$$J(y) = \int_0^\pi [4y'(x)^2 + 2y(x)y'(x) - y(x)^2]\,\mathrm{d}x, W = \left\{ y \in C^1[0,\pi], \middle| y(0) = 2, y(\pi) = 0 \right\}$$

c)

$$J(y) = \int_0^1 [(y'(x) - x)^2 + 2xy(x)]\,\mathrm{d}x, W = \left\{ y \in C^1[0,1] \middle| y(0) = 1 \right\}$$

2. Muotoile seuraava tehtävä ja ratkaise se: Etsi lyhin polku origosta paraabelille $y = x^2 - 1$.

3. Palkin taipumaa kuvaa seuraava tehtävä: Olkoon

$$W = \left\{ y \in C^2[0,1] \middle| y(0) = y'(0) = y(1) = 0 \right\}.$$

Etsi $y \in W$ siten, että

$$J(y) = \int_0^1 [y''(x)^2 - F(x)y(x)]\,\mathrm{d}x$$

minimoituu. $y''(x)^2$ kuvaa palkin taipumisenergiaa ja F on palkkiin vaikuttava voima.
a) Mikä on tehtävän variaatiomuoto?
b) Etsi Eulerin yhtälö ja ratkaise se (kun F=vakio)
c) Tulkitse reunaehdot fysikaalisesti
d) Samat kysymykset tapauksessa

$$W = \left\{ y \in C^2[0,1] \middle| y(0) = 1, y'(0) = 0 \right\}.$$