

Elementtimenetelmä

Harjoitus 3.

1. Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -u'' + u = f, 0 < x < 1 \\ u(0) = a \\ u'(1) + u(1) = b. \end{cases}$$

Mikä on vastaava variaatio- ja minimitehtävä. Mistä avaruudesta etsitään ratkaisuja u ja mikä on testifunktioavaruus?

2. Tarkista että seuraavat ovat normiavaruuksia

a)

$$V = \mathbb{R}^n, |x| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

b)

$$V = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva ja } f' \text{ jatkuva} \right\} = C^1[0, 1], \\ \|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} \{ |f(x)|, |f'(x)| \}$$

c)

$$V = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^1 |f(x)| < \infty \right\}, \\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \, dx$$

d)

$$V = l^2(\mathbb{Z}) = \left\{ x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\} \\ \|x\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

3. Osoita, että

$$|x|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \text{ ja } |x|_\infty = \max |x_i|$$

ovat ekvivalentteja.

4.

$$\begin{cases} -u'' + au = f, 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Näytä että ratkaisu ei ole yksikäsitteinen tietyillä a :n arvoilla. Määritä kaikki sellaiset a :t.

5. Tarkastellaan lineaarikuvausta

$$K : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1], (Ku)(x) = \int_0^1 (1 + x^2 y^3) u(y) dy.$$

Laske K :n normi. Miten vastaus muuttuu jos tulkitaan $K : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, ja normina max-normi? Yritä ainakin antaa jokin yläraja normille molemmissa tapauksissa.