Elementtimenetelmä
Harjoitus 4.

1. Luennolla todettiin, että

$$u(x) = \begin{cases} x - x^2, & 0 \le x \le 1/2 \\ 1/4, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

on heikko ratkaisu tehtävälle

$$(*) \begin{cases} -u'' = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}, f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

Tarkista että annettu u toteuttaa tehtävää (*) vastaavan variaatiotehtävän.

2.Tarkista että $H^1[0,1]$:n sisätulo

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 (u'v' + uv)\, \mathrm{d}x$$

toteuttaa sisätulon aksioomat.

3. Olkoon

$$V = \{u = H^1[0,1] | u(0) = u(1) = 0\}$$

ja

$$b(u,v) = \int_0^1 x^2 u'(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.$$

a) Totea, että b on symmetrinen ja positiivinen, mutta ei elliptinen.
b) Olkoon $Lv = \int_0^1 v(x)\, \mathrm{d}x$. Osoita että variaatiotehtävällä

$$\text{etsi } u \in V \text{ siten, että } b(u,v) = Lv\ \forall v \in V$$

ei ole ratkaisua. Vihje: mikä on vastaava Eulerin yhtälö?

4. Olkoon

$$V = \left\{u \in H^1[0,1] | u(0) = u(1) = 0\right\}$$

ja $b : V \times V \to \mathbb{R}$,

$$b(u,v) = \int_0^1 \left[c(x)u'(x)v'(x) + a(x)u(x)v(x)\right]\, \mathrm{d}x.$$

a) Olkoon

$$\begin{aligned} 0 < c_1 \le c(x) \le c_2, \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 < c_3 \le a(x) \le c_4, \quad 0 \le x \le 1 \end{aligned}$$

Näytä että b on elliptinen.

b) Olkoon $Lv = \int_0^1 fv\, \mathrm{d}x$. Mikä on variaatiotehtävää

$$\text{etsi } u \in V \text{ siten, että } b(u,v) = Lv\ \forall v \in V$$

vastaava Eulerin yhtälö?