Elementtimenetelmä
Harjoitus 5.

1. Olkoon
$$\mathbb{P}_3 = \left\{ p \,\middle|\, p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \right\}$$
ja
$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ x^2 - 1, x^3 + 6x - 2, 2 - x, x + 5x^3, 1 + x + x^2 \right\} \\ S_2 &= \left\{ x^2 + 2x - x^3, 3 - 4x, x^3 - 5x - 1, x^2 + 1 \right\} \end{aligned}$$
Ovatko S_1 ja S_2 $\mathbb{P}_3$:n kantoja?

2. Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -u'' + 9u &= 5 - 5x, \ 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0 \\ u'(1) &= -1/2 \end{cases}$$

a) Mikä on tarkka ratkaisu?
b) Muotoile tahtävä variaatiotehtävänä
c) Olkoon $S_1 = \{x, x^2\}$, $S_2 = \{x^3, x^5\}$, $V_1 = \mathrm{span}(S_1)$ ja $V_2 = \mathrm{span}(V_2)$. Laske numeerinen ratkaisu sekä V_1:n että V_2:n avulla. Miksi V_1 antaa paremman tuloksen? Piirrä kuva.
d) Muotoile numeerinen tehtävä minimointitehtävänä ja totea että sen ratkaisussa päädytään samoihin yhtälöihin kuin kohdassa c).

3. Näytä että symmetrisen matriisin ominaisarvot ovat reaalisia.

4. Olkoon

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2 \\ 1, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \\ f_3(x) &= x, 0 \le x \le 1 \\ f_4(x) &= \begin{cases} 3x, & 0 \le x \le 1/3 \\ 1, & 1/3 \le x \le 1 \end{cases} \end{aligned}$$

a) Olkoon $S_3 = \{f_1, f_2, f_3\}$ ja $S_4 = \{f_2, f_3, f_4\}$. Näytä että S_3 on lineaarisesti riippuva ja S_4 lineaarisesti riippumaton.
b) Ratkaise tehtävä 2 S_4:n avulla. Piirrä kuva ja vertaa 2. tehtävän muihin ratkaisuihin.

5. Olkoon
$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 (u'v' + 9uv)\,\mathrm{d}x$$
ja tarkastellaan avaruutta $V_1 = \mathrm{span}(S_1)$ kuten tehtävässä 2. Löytyykö V_1:lle sellainen kanta $\{v_1, v_2\}$ että $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$? Mitä etua tällaisesta kannasta olisi tehtävän ratkaisun kannalta?