

Elementtimenetelmä

Harjoitus 6.

1. Olkoon v_k :t kuten luentomonisteen sivulla 14 ja olkoon $x_k = kh$. Laske massamatriisi tässä tapauksessa. Entä mikä matriisiksi tulee jos x_k :t eivät ole tasavälein?

2. Tarkastellaan ominaisarvotehtävää

$$\begin{cases} -u'' + u = \lambda u \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

a) Laske ominaisarvot ja $-$ funktiot

b) Muodosta jäykkyys- ja massamatriisit R ja M käyttäen v_k :ta tasavälisessä tapauksessa kuten edellisessä tehtävässä.

c) Analysoi MATLABilla matriisien R ja M ominaisarvoja (komento `eig`). Matriisien muodostamisessa komento `toeplitz` on hyödyllinen. Kokeile eri n :n arvoja. Täyttääkö spektrit koko Gershgorinin lauseen salliman alueen?

d) Vertaa R :n spektriä alkuperäisen tehtävän spektriin.

e) Jos ominaisarvotehtävä muotoillaan variaatiotehtävänä niin päädytään yleistettyyn ominaisarvotehtävään

$$(*) \quad Rc = \lambda Mc.$$

Tämäkin voidaan laskea MATLABilla komennolla `eig`. Vertaa oikeaan tulokseen kuten d)-kohdassa.

f) Pohdi miksi tehtävää (*) ei kannata palauttaa perustehtäväksi

$$M^{-1}Rc = \lambda c.$$

3. Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -u'' + u = 200x^7 - 10x \\ u(0) = 0, u'(1) = -17 \end{cases}$$

a) Mikä on tarkka ratkaisu? Ratkeaa myös Maplella

b) Ratkaise tehtävä numeerisesti MATLABilla käyttäen edelleen paloittain lineaarisia kantafunktioita; tutki virhettä numeerisesti eri h :n arvoilla ($h, h/2, h/4, \dots$) käyttäen maksimi-, L^2 - ja H^1 -normia.