

Elementtimenetelmä

Harjoitus 8.

1.

$$\begin{cases} -\Delta u = f, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, x \in \Gamma \end{cases}$$

Onko ratkaisua olemassa? Onko ratkaisu yksikäsitteinen? (Ohje: Greenin kaavat)

2. Greenin kaava tasossa kirjoitetaan usein

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Selvitä miten tämä ja oheinen divergenssilause ovat itse asiassa sama asia (tasotapauksessa).

3. Olkoon

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_3 < 1, x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 1\}$$

Olkoon $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$v(x) = (3x_1^2x_2, x_1x_2, 0).$$

Jos v kuvaa nesteen virtausta \mathbb{R}^3 :ssa niin mikä on Ω :sta poistuva nestemäärä/aikayksikkö?

4. Olkoon

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, |y| < 1\}.$$

Tarkista tehtävän 2) kaava laskemalla molemmat puolet kun

$$P(x, y) = xy^3, \quad Q(x, y) = x^2y.$$

Projektitehtävä

Olkoon annettu

$$Lv = \int_0^1 f v dx$$

ja kannat kuten edellisessä projektitehtävässä.

Tee ohjelma, joka annetulle funktiolle f ja kanta-funktioille v_k laskee

$$q_k = \int_0^1 f v_k dx.$$

Jos f on yleinen niin tässä tapauksessa pitää käyttää numeerista integrointia.

Kaavoja

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla \cdot f \, dx &= \int_{\Gamma} \langle f, n \rangle da && \text{div lause} \\ \int_{\Omega} (v \Delta u + \langle \nabla u, \nabla v \rangle) \, dx &= \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} da && \text{Green 1} \\ \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx &= \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) da && \text{Green 2} \\ \int_{\Omega} \Delta u \, dx &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} da && \text{Green 3}\end{aligned}$$