Funktionaalianalyysi
Demo 10, syksy 2003

1. Osoita, että jokainen $g \in L^1(-1,1)$ määrittelee jatkuvan lineaarikuvauksen $T_g : C(-1,1) \to \mathbb{K}$ kaavalla
$$T_g : f \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

2. Voitko esittää jotain sen väitteen tueksi, että T_g:n operaattorinormi avaruudessa $\mathcal{L}\big(C(-1,1),\mathbb{K}\big)$ eli $C(-1,1)^*$ on sama kuin g:n normi avaruudessa $L^1(-1,1)$. (Esimerkiksi voisit tarkastella positiivista funktiota g.) Osoita vielä, että $C(-1,1)^*$:ssä on muitakin alkioita kuin $L^1(-1,1)$-funktioita, esim. kuvaus $\delta_0 : f \mapsto f(0)$.

3.-4. Olkoon $1 < p < \infty$ (tai jos se helpottaa asiaa, voit ajatella esim. $p = 5$). Tiedetään, että avaruuden $L^p(0,10)$ duaali on $L^q(0,10)$, missä $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ja duaaliparina on konkreettisesti
$$< f, g > := \int_0^{10} f(t)g(t)dt.$$
Mikä on avaruuden
$$L^p(]0,10[; e^{-t}) = \left\{ f :]0,10] \to \mathbb{K} \text{ mitallinen} \;\middle|\; \|f\| := \left(\int_0^{10} |f(t)|^p e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$
duaali? (Opastus: se on muotoa $L^q(]0,10[; w)$, missä w on sopiva painofunktio.)

5.-6. Olkoon $E := C(0,5)$. Mitkä kuvaukset seuraavista ovat projektioita vakiofunktioiden muodostamalle 1-ulotteiselle aliavaruudelle E_1:

a) $f \mapsto f(0)$, b) $f \mapsto f(2)$, c) $f \mapsto f'(1)$,

d) $f \mapsto \displaystyle\int_0^5 f(t)dt$, e) $f \mapsto \displaystyle\frac{1}{5}\int_0^5 f(t)dt$,

f) $f \mapsto e^{-t} \displaystyle\int_0^5 f(s)ds$, g) $f \mapsto C \displaystyle\int_0^5 f(s)e^{-s^2}ds$,

missä $C = \left(\displaystyle\int_0^5 e^{-s^2} ds \right)^{-1}$, h) $f \mapsto \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^2 f(s)ds$.

Olkoon E_2 polynomin t virittämä 1-ulotteinen aliavaruus. Ovatko seuraavat projektioita $C(0,5)$:ltä E_2:lle:

a) $f \mapsto tf(0)$, b) $f \mapsto tf(1)$, c) $f \mapsto \displaystyle\int_0^5 sf(s)ds$, d) $f \mapsto Ct \displaystyle\int_0^5 f(s)ds$.

(Kohdassa d): on, jos C valitaan sopivasti; miten?)

Lopuksi "diplomityö": etsi joku projektio $C(0,5)$:n aliavaruudelle $E_1 \oplus E_2$!