
Funktionaalianalyysi

Demo 1, syksy 2003

1.-2. Ovatko seuraavat reaaliarvoiset funktiot $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ normeja. Ovatko ne seminormeja ($x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$)?

$$p(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

$$p(x) = |x_1| + 2|x_2| + 5|x_3|,$$

$$p(x) = 5|x_1 - x_2| + |x_3|,$$

$$p(x) = |x_1 + x_2| + 10|x_3|,$$

$$p(x) = 3|x_1| - |x_2| + |x_3|,$$

$$p(x) = |x_1 + 2x_2| + |x_1 - 2x_2| + |x_3|.$$

3.-4. Suppeneeko jono $(f_n)_{n=1}^\infty$ avaruudessa $C(0, 1) := C([0, 1])$, kun $f_n = f_n(t)$, $t \in [0, 1]$ on

a) $\sin(nt)$, b) $\frac{1}{n} \cos(nt)$, c) $(1 - t)^n$,

d) $\sum_{k=1}^n t^k$, e) $\sum_{k=1}^n (t/2)^k$?

Tässä $C(0, 1)$ on varustettu tavanomaisella sup-normillaan.

5. Avaruudessa $C(0, 1)$ myös lauseke

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt$$

määrittelee normin. Suppenevatko ed. tehtävän jonot a)-c) tämän normin mielessä?