Funktionaalianalyysi
Demo 11
Syksy 2003

1. Tarkastellaan avaruutta $L^p := L^p(0,5)$, kun $1 < p < \infty$ ja kerroinkunta $\mathbf{R}$. Olkoon $f \in L^p$. Etsi sellainen L^p:n duaalin $L^q := L^q(0,5)$ alkio g, jolle pätee $\|g\|_q = 1$ ja toisaalta

$$\langle f, g \rangle := \int_0^5 f(t)g(t)dt = \|f\|_p.$$

Vihje. Funktio g on $g(t) = C|f(t)|^{p-1}\chi(t)$, missä $\chi(t) = 1$, jos $f(t) > 0$, $\chi(t) = -1$, jos $f(t) < 0$, ja $\chi(t) = 0$, jos $f(t) = 0$. Lisäksi C on f:stä riippuva positiivinen luku. Määrää vakio C ja todista, että g toteuttaa kaikki vaatimukset.

2.–3. Normiavaruuden E osajoukko A on *prekompakti*, jos kaikilla $r > 0$ voidaan löytää *äärellinen määrä* E:n pisteitä $x_1, \ldots, x_n$ siten, että pätee

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} \Big(x_j + B(\bar{0}, r)\Big). \tag{1}$$

Toisin sanoen, prekompakti joukko voidaan aina peittää *äärellisen monella* pallolla, joiden säde voidaan valita mielivaltaisen pieneksi.
(Huomaa, että yllä joukko $x_j + B(\bar{0}, r)$ on täsmälleen sama kuin x_j–keskinen, r–säteinen pallo $B(x_j, r)$.)
Totea:

a) Prekompaktin joukon osajoukko on prekompakti.

b) Prekompakti joukko A on aina *rajoitettu*, eli on olemassa joku M, jolle A sisältyy joukkoon $B(\bar{0}, M)$. Ohje. Valitse yllä esim. $r = 1$, ja luvuksi M vaikkapa suurin luvuista $\|x_j\|$ lisättynä 100:lla. Totea, että jokainen joukoista $x_j + B(\bar{0}, r)$ tällöin erikseen sisältyy joukkoon $B(\bar{0}, M)$.

c) Jos A on prekompakti ja $\lambda \in \mathbf{R}$, niin joukko $\lambda A := \{\lambda x \mid x \in A\}$ on prekompakti.

d) Jos A ja B ovat prekompakteja, niin joukko $A + B := \{x + y \mid x \in A \ , \ y \in B\}$ on prekompakti.

4.–5. Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä T lineearinen kuvaus $T : E \to F$. Operaattori T on *kompakti*, jos se kuvaa lähtöavaruuden yksikköpallon $B_E(\bar{0}, 1)$ avaruuden F *prekompaktiksi* osajoukoksi.
Todista (käyttäen hyväksi edellisen tehtävän tuloksia):

a) Jos T on kompakti, niin se on myös jatkuva. (Huomaa, että lineaarioperaatori on jatkuva, jos ja vain jos se kuvaa lähtöavaruuden yksikköpallon maaliavaruuden jonkun $\bar{0}$–keskisen pallon sisään.)

b) Jos T sekä myös operaattori $S : E \to F$ ovat kompakteja, niin summaoperaattori $T + S$ on kompakti.

c) Jos $R : E \to E$ on jatkuva lineaarioperaattori ja T on kompakti, niin yhdistetty operaattori $TR := T \circ R$ on kompakti.

d) Jos $F := \mathbf{R}$ ja T on jatkuva, niin T on kompakti operaattori. (Voit käyttää tietoa, että yksi–, ja yleisemmin, äärellisulotteisessa normiavaruudessa jokainen rajoitettu joukko on prekompakti.)