Funktionaalianalyysi
Demo 12
Syksy 2003

1. Faktoja:

(i) Jos A on Banach–avaruuden X prekompakti osajoukko, niin sen sulkeuma $B := \bar{A}$ on kompakti X:n osajoukko. Tämä tarkoitti sitä, että jokaisella B:n jonolla on (X:n normin mielessä B:n alkioon) suppeneva osajono. Jokainen kompakti joukko on aina myös prekompakti, käänteinen väite ei päde yleisesti.

(ii) äärellisulotteisen Banach–avaruuden osajoukko on prekompakti jos ja vain jos se on rajoitettu. Sen sijaan ääretönulotteisessa Banach–avaruudessa X voidaan *aina* löytää rajoitettuja osajoukkoja, jotka eivät ole prekompakteja. Esimerkiksi yksikköpallo $B(\bar{0}, 1)$ tai sen sulkeuma $\bar{B}(\bar{0}, 1)$ ovat tällaisia.

Todista viimeksi esitetty väite avaruuden $X := \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, tapauksessa: etsi jono yksikköpallon vektoreita, jolla ei ole suppenevaa osajonoa. (Vihje: kanoniset kantavektorit.)

2. Sama siinä tapauksessa, että X ääretönulotteinen, separoituva Hilbert–avaruus. (Vihje: ota jokin ortonormaali kanta.)

3. Olkoon X Banach–avaruus ja $K : X \to X$ kompakti lineaarioperaattori. *Fredholmin teoria* käsittelee muotoa

$$f + Kf = g \tag{1}$$

olevia yhtälöitä, missä $f \in X$ on tuntematon ja $g \in X$ on annettu. Muistamme, että jos operaatorin K normi on aidosti pienempi kuin 1, niin yhtälö (1) aina ratkeaa Neumannin sarjalla . Jos $\|K\| \geq 1$, niin yhtälöllä ei tarvitse olla ratkaisua. (Fredholmin teorian avulla tilannetta voidaan analysoida tarkemmin; emme kuitenkaan tässä mene yksityiskohtiin.) Osoita, että yhtälöllä

$$f(t) - \frac{3}{1000} \int_0^{10} t^2 f(s) ds = g(t) \tag{2}$$

ei ole aina ratkaisua avaruudessa $X := C(0, 10)$. Vihje: ota $g(t) = t^2$. Osoita, että f:n täytyy silloin olla muotoa $f(t) = Ct^2$, missä C on jokin vakio. Näytä, että tällainen funktio ei kuitenkaan voi ratkaista yhtälöä (2).

4. Selitä, miksi Fredholmin teoriaa voidaan periaattessa soveltaa avaruudessa $C(0, 10)$ muotoa

$$f(t) + \int_0^{10} e^{(t+s)^2} f(s) ds = g(t) \tag{3}$$

olevaan yhtälöön. Ohje. Sinun on osoitettava, että yhtälössä esiintyvä integraalioperaattori on kompakti operaattori. Voit käyttää tietoa, että avaruudessa $C(0,10)$ tyyppiä

$$\{f \in C(0,10) \mid \sup_{t\in[0,10]} |D^j f(t)| < \infty \text{ kaikilla } j = 0,1,2\ \}$$

olevat osajoukot (eli joukot, joiden alkoiden derivaatat kertalukuun 2 asti ovat rajoitettuja) ovat prekompakteja.