Funktionaalianalyysi

Demo 2, syksy 2003

1. Kuuluuko vektori a) $x = (1, 2, 3, 4, ...)$, b) $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, missä $x_k = \frac{1}{k}\sin(\pi k + \frac{\pi}{2})$, avaruuden ℓ^∞ joukkoon $B(a, 1)$, kun a on vektori $(1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, 1 + \frac{k-1}{k}, \ldots)$?

2. Kuuluuko vektori $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, $x_k = 2 - \frac{1}{k}$, joukkoon $B(\overline{1}, 1)$ avaruudessa ℓ^∞? (Tässä $\overline{1}$ on jono, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä.)

3. Onko avaruuden $L^1(\Omega)$, $\Omega =]0, 5[\subset \mathbb{R}$, osajoukko $X := \{ f \in L^1(\Omega) \mid f(t) = 0 \ \forall\, t \in]0, 1[\}$ **tiheä** $L^1(\Omega)$:ssa, eli voidaanko jokaista $L^1(\Omega)$:n alkiota approksimoida X:n alkioilla? (Vastaus: Ei. Etsi joku $L^1(\Omega)$:n alkio g, jolle esim. $\|f - g\|_1 \geq 1 \ \forall\, f \in X$.)

4. Osoita, että avaruuden $C(-2, 2)$ osajoukko $Y := \{ f \mid f(t) = f(-t) \}$, joka siis koostuu parillisista funktioista, on suljettu. (Y on suljettu, jos sen komplementti Y_C on avoin. Olkoon $g \in Y_C$. Tällöin $\exists\, t \in [0, 2]$ jolle $|g(t) - g(-t)| =: r > 0$. Osoita, että $B(g, \frac{r}{100}) \subset Y_C$.)