
Funktionaalianalyysi

Demo 4, syksy 2003

1. Tutki seuraavan operaattorin lineaarisuutta ja jatkuvuutta avaruudesta ℓ^p avaruuteen ℓ^p , sekä löydä käänteisoperaattori, mikäli mahdollista:

$$T : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3 + x_4, x_3 - x_4, x_5 + x_6, \dots),$$

Tässä $1 \leq p < \infty$.

2. Samoin,

$$T : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (-2x_4, x_1, x_2, x_3, -\frac{3}{2}x_8, x_5, x_6, x_7, -\frac{5}{4}x_{12}, x_9, x_{10}, x_{11}, \dots)$$

3. Ovatko avaruudet $L^p(]0, \infty[)$ ja $L^p(]0, 8[, e^{-t})$ isomorfiset (kumpikin koostuu mitallisista kuvauksista $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, edellisessä normina

$$\left(\int_0^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

jälkimmäisessä

$$\left(\int_0^{\infty} |f(t)|^p e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{p}}?$$

Tutki tämä p :n arvoilla 1, 2 ja 8.

- 4.-5. Integraalioperaattori

$$S : f \mapsto \int_0^{10} e^{-t} s(s-10) f'(s) ds$$

on ainakin hyvin määritelty lineaarikuvaus $C^1(0, 10) \rightarrow L^1(0, 10)$. (Pilkku yllä on derivaatta). Näytä, että se voidaan laajentaa jatkuvaksi lineaarikuvaukseksi $L^1(0, 10) \rightarrow L^1(0, 10)$. (Huom! Tämä merkitsisi sitä, että "opimme derivoimaan myös epä-jatkuvia funktioita!"). Tee siis näin. **Osittaisintegro**i integraalilausekkeessa derivaatta operoimaan polynomien $s(s-10)$. (Sijoitustermi häviää, miksi?) Operaattorille saadaan siis toisennäköinen lauseke. Tätä lauseketta käyttäen ei ole vaikea näyttää, että S on jatkuva lineaarioperaattori $C^1(0, 10) \rightarrow L^1(0, 10)$ **silloinkin**, kun lähtöavaruus on varustettu $L^1(0, 10)$:n normilla. Lopuksi käytä luentoja ja tietoa, että $C^1(0, 10)$ on tiheä $L^1(0, 10)$:n aliavaruus (tätä ei tarvitse todistaa).