Funktionaalianalyysi
Demo 5
Syksy 2003

1. Tutki integraaliyhtälön

$$f(t) = \int_{-1}^{1} \frac{s}{10+t} f(s)ds + 16e^{-t^2/1000}$$

ratkaisun olemassaoloa. Etsitään siis funktiota $f \in C(-1,1)$, joka toteuttaa yllä olevan yhtälön.

2. Totea suunnikasyhtälön

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 \tag{1}$$

voimassaolo, kun kyseessä on Hilbert–avaruus $L^2(0,5)$ ja funktiot f ja g ovat $f(t) := 3t$ ja $g(t) = t^2$.
Päteekö (1) annetuille funktioille, jos avaruus vaihdetaankin $C(0,5)$:een, varustettuna sup–normilla?

3. Mikä on ℓ^2:n osajoukon

a) $M := \{x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \mid x_k = 0,$ kun k on jaollinen luvulla $7\}$,

b) $N := \{x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \mid x_k = 1/(2k),$ kun k on parillinen$\}$,

ortogonaalinen komplementti? Totea (:= tee selväksi itsellesi; ei tarvitse kirjoittaa pitkiä todistuksia), että ko. joukot ovat ℓ^2:n vektorialiavaruuksia.

4.–5. Olkoon H Hilbert–avaruus $L^2(0,10)$. Olkoon

$$A := \{f \in H \mid f(t) = 5 \text{ (melkein) kaikilla } t \in [2,4]\}.$$

Onko joukossa A normin minimoivaa alkioita? Mikä se on? Mikä on se A:n alkio, joka on H:n normin mielessä lähinnä alkoita $g(t) := e^{-t}$?
Mieti vielä, muuttuuko tilanne, jos H korvataankin painotetulla L^2–avaruudella, jossa normi on

$$\|f\| := \left(\int_{0}^{10} |f(t)|^2 (1+t)^3 dt \right)^{1/2} ?$$