

1. Laske funktion  $t^2 \in L^2(0, 2\pi)$  (reaaliset tai kompleksiset) Fourier-kertoimet.

2. Olkoon  $A := \{f_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ , missä

a)  $f_n(t) = 1$ , kun  $t \in ]-1, 0]$ , ja  $f_n(t) = t^n$ , kun  $t \in ]0, 1[$ ,

b)  $f_n(t) = t^{2n}$ .

Osoita, että kummassakaan tapauksessa  $\overline{\text{span}A}$  ei ole koko avaruus  $L^2(-1, 1)$ . Vihje. Kummassakin tapauksessa funktioiden  $f_n$  lineaarikombinaatioilla on joku erikoisominaisuus, jota kaikilla  $L^2(-1, 1)$ :n alkiolla ei ole.

3. Ortonormita jono  $(1, t, 2t - 3, t^2)$  avaruudessa a)  $L^2(0, 1)$  b)  $L^2(-1, 1)$ . Tehtävänä on siis muodostaa uusi jono, joka virittää saman aliavaruuden kuin annettu jono, ja jonka jäsenet ovat keskenään ortogonaaliset. Mikä on kyseisen aliavaruuden dimensio?

4. Kuvaile, kuinka Haarin kantafunktioiden avulla (niiden lineaarikombinaatioina) voidaan approksimoida funktiota  $f(t) = t$  välillä  $[0, 1]$  (avaruuden  $L^2(0, 1)$  normin mielessä). Ei tarvitse kirjoittaa kerrointen täsmällisiä lausekkeita, riittää havainnollistaa asiaa esimerkiksi funktioiden kuvaajien avulla.