Funktionaalianalyysi
Demo 7, syksy 2003

1. Osoita, että funktio $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1 \\ e^{-\frac{1}{1-|t|^2}}, & |t| \le 1 \end{cases}$$

on mielivaltaisen monta kertaa jatkuvasti derivoituva.

2. Jos $f \in L^1(\mathbb{R})$, onko funktio

$$f * \varphi(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-s) f(s) ds$$

derivoituva? (Tutki erotusosamäärää.)

3. Arvaustehtävä. Kuinka monta kertaa tehtävän 2 funktio $f * \varphi$ derivoituu? Vaikuttaako f:n derivoituvuus asiaan, ja jos vaikuttaa, miten? Jos f on jatkuva pisteessä t, mitä lukua lähestyy lauseke

$$f * \varphi_n(t) := \int_{-\infty}^{\infty} n\varphi\big(n(t-s)\big) f(s) ds,$$

kun $n \to \infty$? (Piirrä kuva.)

4. Osoita, että jos $f \in L^2(0, 2\pi)$, niin sen kompleksisen Fourier-sarjan n:s osasumma

$$s_n(f,t) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikt}, \qquad (*)$$

missä

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

on k:s Fourier-kerroin, saadaan kaavasta

$$s_n(f,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})(t-s)\big)}{\sin\big((t-s)/2\big)} ds.$$

(Vihje. Sovella geometrista sarjaa kaavassa $(*)$.)

5. Onko bilineaarinen muoto

a) $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t) g(t) e^{-t^2} dt,$

b) $(f,g) \mapsto \left(\displaystyle\int_0^1 f(t) t^2 dt\right) \left(\displaystyle\int_0^1 g(t) e^{-t^2} dt\right)$

jatkuva tai koersiivinen kuvauksena $L^2(0,1) \times L^2(0,1) \to \mathbb{R}$?