Funktionaalianalyysi
Demo 8, syksy 2003

1. Olkoon $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funktio

$$\varphi(\overline{x}) := \begin{cases} 0, & |\overline{x}| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-|\overline{x}|^2}}, & |\overline{x}| < 1 \end{cases}.$$

Näytä, että φ:n kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat ovat jatkuvia.

2. Sobolev-avaruus $W^{1,p}(\Omega)$, missä $1 \leq p \leq \infty$ ja Ω on tason $\mathbb{R}^2$ avoin, rajoitettu osajoukko, määritellään niiden funktioiden $f \in L^p(\Omega)$ joukkona, joille on olemassa $L^p(\Omega)$-funktiot g_1 ja g_2 siten, että

$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\int_\Omega g_j \varphi$$

kaikilla kompaktikantajaisilla C^∞-funktioilla φ, $j = 1, 2$. Merkitään $g_j =: \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ (f:n heikko derivaatta). Osoita, että g_1 riippuu lineaarisesti f:stä.

3. Osoita, että lauseke

$$\|u\| := \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{j=1}^{2} \left(\int \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

on normi avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$ ja että tapauksessa $p = 2$, lauseke

$$(u|v) := \int_\Omega u\overline{v} + \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_j}$$

on sisätulo $W^{1,2}(\Omega)$:ssa. Tässä $\overline{v}$ on v:n kompleksikonjugaatti.

4.-5. Hahmottele osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} -\Delta u(\overline{x}) + u(\overline{x}) = f(\overline{x}), & \overline{x} \in \Omega \\ u(\overline{x}) = 0 \quad \forall\, \overline{x} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

ratkaisemista, missä f on annettu esim. jatkuva ja rajoitettu funktio Ω:n sulkeumassa. Tässä Δ on Laplace-operaattori,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$