Funktionaalianalyysi
Demo 9, syksy 2003

1. Laske funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega =]-1,1[\times]-1,1[\subset \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = 1 + |x_1| + |x_2|^3$$

missä $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, heikot osittaisderivaatat x_1:n ja x_2:n suhteen (vrt. Demo 8, tehtävä 2).

2. Olkoon $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jono funktioita

$$f_n(x) = \begin{cases} -n|x|, & |x| \le \frac{1}{n} \\ -1, & 1 > |x| \ge \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Approksimoiko f_n hyvin funktiota $g(x) := -1$ (suurilla n) avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega =]-1,1[$?

3. Olkoon $E = F = C(-1,1)$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$, T_n operaattori

$$T_n f(t) := f(|t|^n).$$

Kumpi Banach-Steinhausin lauseen väittämistä toteutuu tälle kuvausperheelle? Jos se on jälkimmäinen, etsi siinä mainittu vektori (funktio) x.

4. Samoin, $E = F = L^1(\mathbb{R})$,

$$T_n f(t) := e^{-|t|} \int_1^{\infty} f(sn^{-1}) ds.$$